Herrn Prof. Greuer

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 67

Die Reflexion sehr langer elektromagnetischer Wellen am anisotropen inhomogenen Ionosphären-Plasma

von

Dr. H. VOLLAND

Berlin
1963

Technischer Bericht Nr. 67

Die Reflexion sehr langer elektromagnetischer Wellen am anisotropen inhomogenen Ionosphären-Plasma

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Arbeit werden die Budden'schen Differentialgleichungen für die Scheinleitwert-Matrix eines horizontal geschichteten Ionosphären-Plasmas abgeleitet. Eine Transmissions-Matrix wird definiert und ihre Differentialgleichung aufgestellt. Für ein isotropes Plasma, das sich aus einer beliebigen Zahl von überlagerten homogenen und parallelen Schichten endlicher Dicke zusammensetzt, werden die Reflexions- und Transmissionsfaktoren berechnet. Es wird dann der allgemeine Lösungsweg zur Berechnung der Reflexions- (bzw. Scheinleitwert-) Faktoren eines anisotropen Mediums gleicher Gestalt angegeben und die Fälle

a) vertikale Inzidenz, Magnetfeld beliebig
b) schräge Inzidenz, Magnetfeld senkrecht

explizit ausgerechnet.

Im zweiten Teil der Arbeit werden die Voraussetzungen diskutiert, die erforderlich sind, damit das oben behandelte Modell eine brauchbare Näherung für die reale Ionosphäre ist. Es werden die mittels eines Digitalrechners streng berechneten Reflexionsfaktoren einer isotropen inhomogenen Ionosphäre mit denjenigen Werten verglichen, die aus der Approximation dieser Ionosphäre durch ein geschichtetes Modell folgen. Schließlich werden für die Kreisfrequenz $\omega = 10^5 \sec^{-1}$ die Reflexionsfaktoren von anisotropen geschichteten Modellen berechnet. Diese Modelle entsprechen der Ionosphäre in mittleren Breiten am Tage und in der Nacht und verdeutlichen den wesentlichen Einfluß des Erdmagnetfeldes auf die nächtlichen Ausbreitungsbedingungen.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter
gez. H. Volland
(Dr. H. Volland)

Der Abteilungsleiter
gez. Gundlach
(Prof.Dr.-Ing.F.W.Gundlach)

Der Institutsdirektor
gez. Gundlach
(Prof.Dr.-Ing.F.W.Gundlach)

Berlin-Charlottenburg, den 27. Februar 1963

Inhaltsverzeichnis

Einleitung:

Die Ausbreitung sehr langer elektromagnetischer Wellen im Gebiet zwischen Erde und Ionosphäre läßt sich einerseits wellenoptisch als Ausbreitung innerhalb eines Wellenleiters beschreiben und gibt als Lösung für die elektrische Feldstärke am Empfangsort eine Summe von Eigenwertfunktionen. Andererseits kann man für nicht zu große Entfernungen die Feldstärke am Empfangsort strahlenoptisch aus der Interferenz zwischen Bodenwelle und ein - bzw. mehrfach an der Ionosphäre reflektierten Wellen bestimmen. Beide Darstellungen sind äquivalent und führen zum gleichen Ergebnis (Volland 1961 a).

In grober Näherung verhält sich die Ionosphäre gegenüber Längstwellen wie ein homogenes Plasma mit scharfer unterer Begrenzung. Die Reflexion und Absorption der Längstwellen wird dann bei der strahlenoptischen Betrachtungsweise durch den Fresnel'schen Reflexionskoeffizienten der Wellen beim Übergang in das Plasma mit dem Brechungsindex μ beschrieben. Voraussetzung dafür sind die Vernachlässigung der Erdkrümmung sowie die Annahme, daß sich die vom Sender abgestrahlte Kugelwelle bei ihrer Annäherung an die Ionosphäre wie eine ebene Welle behandeln läßt. Beide Voraussetzungen sind für Frequenzen größer als 5 kHz und Ausbreitungs-Entfernungen von kleiner als 1500 km gut erfüllt.

Für eine Bestimmung des Elektronendichteprofils der tiefen Ionosphäre aus den gemessenen Reflexionsfaktoren von Längstwellen in Abhängigkeit von Einfallswinkel und Frequenz genügt solch einfaches Ionosphärenmodell nicht mehr. Es ist die Berechnung von Reflexionsfaktoren ebener Wellen an der Unterkante einer inhomogenen Modellionosphäre mit höhenabhängiger Elektronendichte und Stoßzahl notwendig.

Bei sehr langen Wellen mit Wellenlängen der Größenordnung von 10 km ist es möglich, die reale Ionosphäre durch eine Anzahl von überlagerten homogenen und parallelen Schichten endlicher Dicke anzunähern. Im ersten Teil dieser Arbeit wird die Aufgabe gelöst, die Reflexionsfaktoren ebener Wellen an einem derart geschichteten anisotropen Medium zu bestimmen. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Berechnung von Reflexionsfaktoren plausibler Ionosphärenmodelle mittels eben erwähnter Schichtapproximation.

I. Theoretische Betrachtungen

1. Aufstellung der Ausgangsformeln

Vorausgesetzt werden ebene Wellen mit harmonischer Zeitabhängigkeit, die auf ein horizontal geschichtetes Medium unter dem Einfallswinkel ϑ einfallen. Die Ausbreitungsrichtung liege in der x-z-Ebene eines Kartesischen Koordinatensystems (z vertikal), und es ist

$$S = \sin\vartheta$$
$$C = \cos\vartheta$$
$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{(Wellenzahl im Vakuum)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= j\omega \\ \frac{\partial}{\partial x} &= -jkS \\ \frac{\partial}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} &= jk\frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} &= {}' \\ \xi &= jkz \quad . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= j\omega\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{I} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega\mu_0 \vec{H} \qquad +) \end{aligned} \tag{1.2}$$

in Verbindung mit der Bewegungsgleichung der Elektronen

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \nu m\vec{v} = e\left(\vec{E} + \mu_0 \left[\vec{v}, \vec{H}_0\right]\right) \quad ; \quad \vec{I} = Ne\vec{v} \tag{1.3}$$

+) Es wird stets das technische Maßsystem benutzt.

gewinnt man nach Elimination von E_z, H_z und I das lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{d\xi}\begin{pmatrix}\underline{e}\\ \underline{h}\end{pmatrix} = -\,\underline{D}\begin{pmatrix}\underline{e}\\ \underline{h}\end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

mit

$$\underline{e} = \begin{pmatrix}E_x\\ E_y\end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{h} = Z_o\begin{pmatrix}H_y\\ -H_x\end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

Es sind

(E_x, E_y)	die Horizontalkomponenten der elektrischen Feldstärke,
(H_x, H_y)	die Horizontalkomponenten der magnetischen Feldstärke,
$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}$	der Wellenwiderstand des Vakuums,
$\vec{I}$	die elektrische Stromdichte
m	Masse) des Elektrons
e	Ladung) des Elektrons
$\vec{v}$	Geschwindigkeit) des Elektrons
N	Elektronendichte
ν	Stoßzahl
$\vec{H}_o$	Erdmagnetfeld $(\lvert\vec{H}_o\rvert \gg \lvert\vec{H}\rvert)$.

Es ist

$$\underline{D} = \begin{pmatrix}\underline{D}_1 & \underline{D}_2\\ \underline{D}_3 & \underline{D}_4\end{pmatrix} \qquad (1.6)$$

mit

$$\underline{D}_1 = S\begin{pmatrix}a_{31} & a_{32}\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{D}_2 = \begin{pmatrix}C^2-a_{33}S^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underline{D}_3 = \begin{pmatrix}1-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & C^2-a_{22}\end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{D}_4 = S\begin{pmatrix}a_{13} & 0\\ a_{23} & 0\end{pmatrix}$$

und erhalten nach Elimination von $\underline{e}$ und $\underline{h}$ aus der Gl. (1.4) die Budden'schen Differentialgleichungen für die Scheinleitwertmatrix

$$\underline{A}' = \underline{D}_3 + \underline{D}_4\underline{A} - \underline{A}\,\underline{D}_1 - \underline{A}\,\underline{D}_2\underline{A}\,. \tag{2.2}$$

Es seien

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} F_{\parallel} \\ F_{\perp} \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} G_{\parallel} \\ G_{\perp} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

die aufwärts und abwärts gehenden Komponenten der elektrischen Feldstärke, die in Richtung der Einfallsebene ($F_{\parallel}$, $G_{\parallel}$), bzw. senkrecht dazu ($F_{\perp}$, $G_{\perp}$) polarisiert sind (siehe Abb. 1). Dann ist

$$\begin{aligned} \underline{f} + \underline{g} &= \underline{\alpha}\,\underline{e} \\ \underline{f} - \underline{g} &= \underline{\beta}\,\underline{h} \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/C \end{pmatrix}\,. \tag{2.5}$$

Die Reflexionsmatrix $\underline{R}$ ist definiert als

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} = \underline{g}\,\underline{f}^{-1}\,, \tag{2.6}$$

(f^{-1} ist die reziproke Matrix von f)

und es ist (Barron, Budden 1959)

$$\underline{R} = (\underline{\alpha} - \underline{\beta}\,\underline{A})(\underline{\alpha} + \underline{\beta}\,\underline{A})^{-1} \tag{2.7}$$

Die in den Gl. (2.1) und (2.6) definierten Matrix-Elemente sind, abgesehen vom Vorzeichen, identisch mit der Budden'schen Definition von $\underline{R}$ und $\underline{A}$. In der Tab. 1 sind die Matrix-Elemente nach der Budden'schen und nach der hier verwendeten Definition gegenübergestellt.

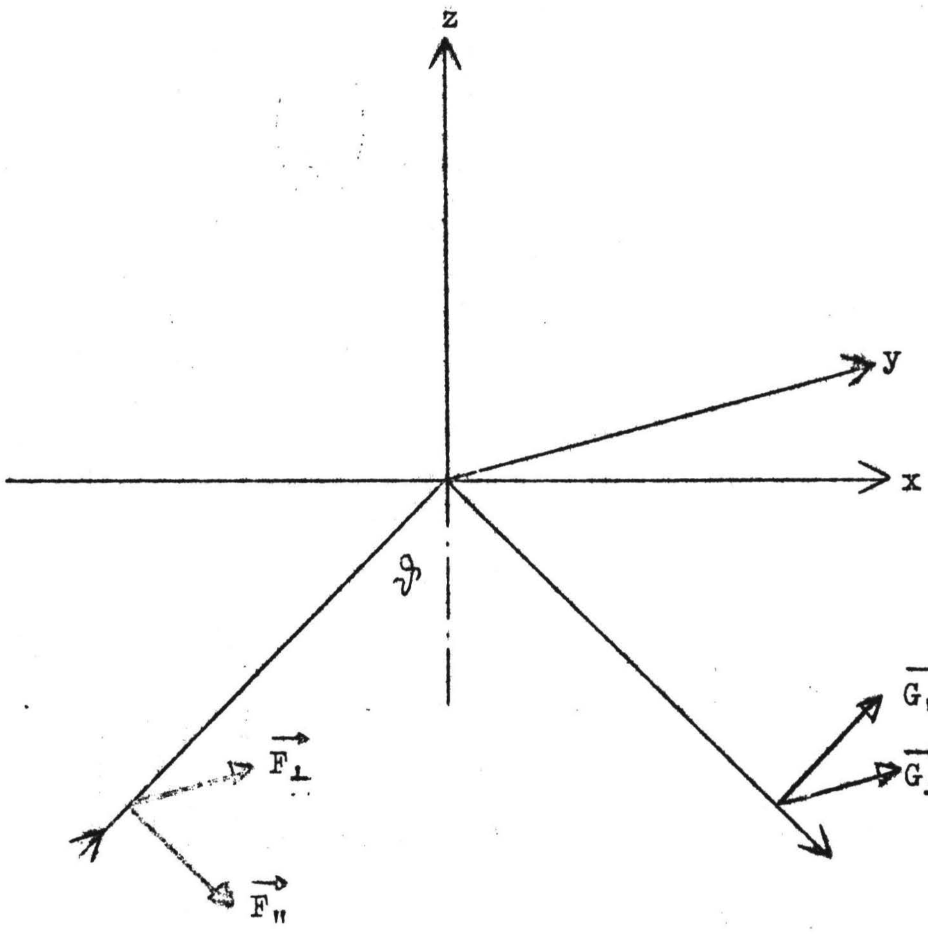


Abb.1: Aufwärts- (F) und abwärts gehende (G) Komponenten der elektrischen Feldstärke, parallel (Symbol $\parallel$) und senkrecht (Symbol $\perp$) zur Einfallsebene polarisiert.

Budden	R_{11}	R_{12}	R_{21}	R_{22}	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}
in dieser Arbeit verwendet	$-R_1$	$-R_2$	R_3	R_4	A_1	A_2	$-A_3$	$-A_4$

Tabelle 1

Die Vorzeichenumkehr bei R_1 und R_2 rührt daher, daß wir in Übereinstimmung mit Poeverlein (Poeverlein 1958) $G_{\shortparallel}$ so definiert haben, daß bei senkrechter Inzidenz und idealer Reflexion Phasengleichheit zwischen $F_{\shortparallel}$ und $G_{\shortparallel}$ in der Reflexionsebene existiert.

Die Gl. (2.2) und (2.7) lauten explizit

$$\begin{aligned} A_1' &= a_{11} - 1 - S\,(a_{13}-a_{31})\,A_1 + \lambda A_1^2 + A_2A_3 \\ A_2' &= a_{12} - Sa_{13}A_2 + Sa_{32}A_1 + \lambda A_1A_2 + A_2A_4 \\ A_3' &= a_{21} - Sa_{23}A_1 + Sa_{31}A_3 + \lambda A_1A_3 + A_3A_4 \\ A_4' &= a_{22} - C^2 - Sa_{23}A_2 + Sa_{32}A_3 + \lambda A_2A_3 + A_4^2 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta R_1 &= A_2A_3 + (1 - CA_1)(1 + \frac{A_4}{C}) \\ \Delta R_2 &= -\,2A_2 \\ \Delta R_3 &= -\,2A_3 \\ \Delta R_4 &= A_2A_3 + (1 + CA_1)(1 - \frac{A_4}{C}) \end{aligned} \qquad (2.9)$$

mit

$$\Delta = -\,A_2A_3 + (1 + CA_1)(1 + \frac{A_4}{C}) \;.$$

3. Aufstellung einer Transmissionsmatrix:

Neben der Reflexion von elektromagnetischen Wellen am Ionosphärenplasma interessiert auch der Anteil der Energie, der durch das Plasma hindurchgedrungen ist.
Wir schreiben

$$\underline{e}(\xi_n) = \underline{K}(\xi_n)\ \underline{e}(\xi) \qquad (3.1)$$

mit

$$\underline{K}(\xi_n) = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

Die Matrix $\underline{K}$ verknüpft die Horizontalkomponenten der elektrischen Feldstärke in der Höhe ξ_n mit den entsprechenden Komponenten in der Höhe ξ.

Mit Hilfe der Gl. (1.4) erhalten wir nach Elimination von $\underline{e}$ die Differentialform

$$\frac{d\underline{K}}{d\xi_n} = (\underline{D}_1 + \underline{D}_2\underline{A})\ \underline{K} \quad . \tag{3.3}$$

$\underline{D}$ ist die in der Gl. (1.6) definierte Matrix. $\underline{A}$ wird hier als bereits aus der Gl. (2.2) bestimmt vorausgesetzt.

Wollen wir den aufwärtsgehenden Anteil der elektrischen Feldstärke in der Höhe ξ_n mit dem aufwärtsgehenden Anteil in der Höhe ξ miteinander verknüpfen, so können wir schreiben

$$\underline{f}(\xi_n) = \underline{T}\ (\xi_n)\ \underline{f}\ (\xi) \tag{3.4}$$

mit

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$\underline{T}$ und $\underline{K}$ sind durch die Beziehung

$$(\underline{\alpha} + \underline{\beta}\ \underline{A}(\xi_n))\ \underline{K}\ (\xi_n) = \underline{T}(\xi_n)(\underline{\alpha} + \underline{\beta}\ \underline{A}(\xi)) \tag{3.6}$$

miteinander verknüpft. ($\underline{\alpha}$ und $\underline{\beta}$ siehe Gl. (2.5))

Ersichtlich ist

$$\underline{K}\ (\xi) = \underline{T}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{3.7}$$

4. Einige spezielle Lösungen der Differentialgleichungen für die Scheinleitwertmatrix

4.1 Isotrope Ionosphäre (Y = 0)

Falls das Erdmagnetfeld unberücksichtigt bleiben kann, vereinfachen sich die Gleichungen ganz wesentlich. Man erhält aus den Gl. (2.8), (2.9) und (3.3)

$$A_1' = -\,\mu^2 + \frac{\mu^2 - S^2}{\mu^2}\,A_1^2 \tag{4.1}$$
$$A_4' = -(\mu^2 - S^2) + A_4^2$$
$$A_2 = A_3 = 0$$

$$R_1 = \frac{1 - CA_1}{1 + CA_1}$$

$$R_4 = \frac{C - A_4}{C + A_4} \tag{4.2}$$

$$R_2 = R_3 = 0$$

$$K'_1 = - \frac{\mu^2 - S^2}{\mu^2} A_1 K_1$$

$$K'_4 = - A_4 K_4 \tag{4.3}$$

$$K_2 = K_3 = 0$$

mit

$$\mu^2 = 1 - \frac{X}{U} \tag{4.4}$$

(Brechungsindex der isotropen Ionosphäre).

Die Gl. (4.1) lassen sich integrieren, sofern μ = const. ist. Man erhält

$$A_1 = \frac{\mu^2}{q} \; \frac{1 - C_1 e^{2jkqz}}{1 + C_1 e^{2jkqz}}$$

$$A_4 = q \; \frac{1 - C_4 e^{2jkqz}}{1 + C_4 e^{2jkqz}} \; . \tag{4.5}$$

Hier sind C_1 und C_4 Integrationskonstanten, und

$$A_{1\infty} = \frac{\mu^2}{q} = \frac{q}{\lambda}$$

$$A_{4\infty} = q = \sqrt{\mu^2 - S^2} \tag{4.6}$$

sind die Scheinleitwerte an der unteren Grenze eines nach oben unendlich ausgedehnten homogenen Plasmas. Deren Reflexionsfaktoren, die mit Hilfe der Gl. (4.2) und (4.6) gewonnen werden können, stimmen, wie erwartet (abgesehen vom Vorzeichen) mit den bekannten Fresnel'schen Formeln überein:

$$R_{1\infty} = \frac{q - C/u^2}{q + C/u^2}$$

$$R_{4\infty} = \frac{C - q}{C + q} \quad . \tag{4.7}$$

Die Lösungen Gl. (4.5) erlauben die Bestimmung der Scheinleitwerte einer isotropen Ionosphäre, die aus einer beliebigen Anzahl von homogenen Schichten endlicher Dicke zusammengesetzt sind. Es sei A_{in} ein beliebiger Scheinleitwert an der oberen Grenze unseres Integrationsgebietes $z = z_n$ (siehe Abb.2). Dann ist in der Höhe z_{n-1}

$$A_{in-1} = A_{in-1\infty} \frac{1 - C_{in-1} e^{-2jkq_{n-1} \Delta z_{n-1}}}{1 + C_{in-1} e^{-2jkq_{n-1} \Delta z_{n-1}}} \tag{4.8}$$

mit

$$C_{in-1} = \frac{A_{in-1\infty} - A_{in}}{A_{in-1\infty} + A_{in}}$$

und in der Höhe z_ν

$$A_{i\nu} = A_{i\nu\infty} \frac{1 - C_{i\nu} e^{-2jkq_\nu \Delta z_\nu}}{1 + C_{i\nu} e^{-2jkq_\nu \Delta z_\nu}} \tag{4.9}$$

mit

$$C_{i\nu} = \frac{A_{i\nu\infty} - A_{i\nu+1}}{A_{i\nu\infty} + A_{i\nu+1}} .$$

$i = 1$ gilt für parallel zur Einfallebene polarisierte Wellen, $i = 4$ für senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Wellen. Die $A_{i\nu\infty}$ sind durch die Formeln Gl. (4.6) für die Parameter der ν-ten Schicht definiert.

Es ist möglich, jede beliebige Anzahl von parallelen homogenen Schichten nacheinander zusammenzusetzen und ihren Scheinleitwert sowie über die Gl.(4.2) auch ihre Reflexionsfaktoren zu bestimmen. Nachdem die A_i ermittelt sind, können die Gl.(4.3) integriert werden. Man erhält

$$K_i = \overline{C}_i(e^{-jkqz} + e^{jkqz}) \tag{4.10}$$

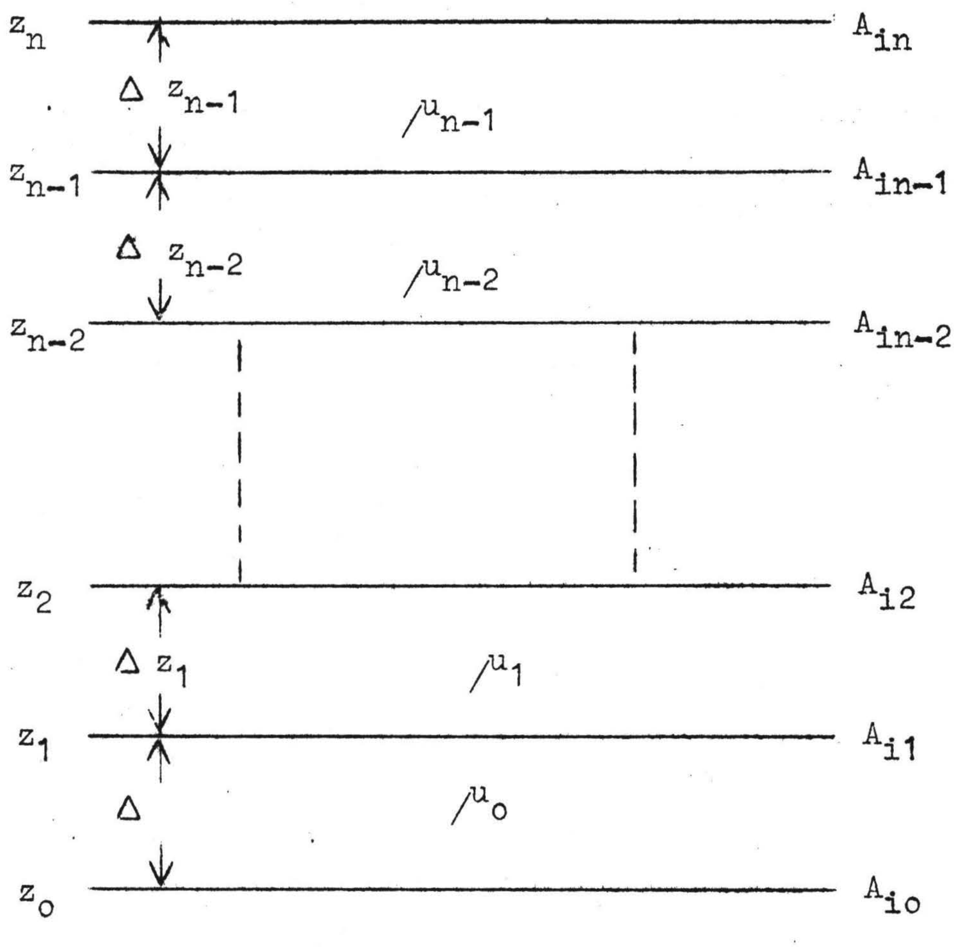


Abb.2: Schichtaufbau

und nach Elimination der Integrationskonstanten $\overline{C}_i$

$$\frac{K_i(z_n)}{K_i(0)} = \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{-jkq_\nu z_{\nu+1}} + C^*_{i\nu}\, e^{jkq_\nu z_{\nu+1}}}{e^{-jkq_\nu z_\nu} + C^*_{i\nu}\, e^{jkq_\nu z_\nu}} \tag{4.11}$$

mit

$$C^*_{i\nu} = C_{i\nu}\, e^{-2jkq_\nu z_{\nu+1}} \quad .$$

Die physikalische Bedeutung von $C^*_{i\nu}$ kann aus der Gl. (4.11) abgelesen werden. Auf der rechten Seite der Gl. (4.11) stehen Produkte der Horizontalkomponenten der elektrischen Feldstärke an der oberen und unteren Grenze der ν-ten Schicht:

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{E_i(z_{\nu+1}-0)}{E_i(z_\nu+0)} \quad . \tag{4.12}$$

Also sind

$$C^*_{i\nu}\, e^{jkq_\nu \xi} \tag{4.13}$$

die reflektierten abwärtsgehenden Wellen innerhalb der ν-ten Schicht, und die $C^*_{i\nu}$ sind die "inneren" Reflexionsfaktoren an der oberen Grenze der ν-ten Schicht in der Höhe $z_{\nu+1}$.

Für numerische Rechnungen ist es bequemer, die Gl. (4.11) folgendermaßen umzuschreiben:

$$K_i(z_n) = e^{-jk\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} q_\nu \Delta z} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{1 + C_{i\nu}}{1 + C_{i\nu}\, e^{-2jkq_\nu \Delta z}} \,, \tag{4.14}$$

da, wie aus Gl. (3.7) folgt,

$$K_i(0) = 1 \tag{4.15}$$

ist.

Die Umrechnung der K_i in die T_i erfolgt durch die Gl. (3.6').

Falls sich oberhalb von z_n ein plasmafreier Raum anschließt, ist

$$T_1(z_n) = \frac{2K_1(z_n)}{1 + CA_1(0)} \tag{4.16}$$

$$T_4(z_n) = \frac{2CK_4(z_n)}{C + A_4(0)} \quad . \tag{4.17}$$

4.2 Anisotrope Ionosphäre

Für die beiden Spezialfälle

a) vertikale Inzidenz ($S = 0$; $l = 0$[+])

b) Magnetfeld vertikal ($l = m = 0$; $n = \pm 1$)

verschwinden die linearen Glieder im Gleichungssystem Gl.(2.8):

$$\begin{aligned} A_1' &= -\frac{\bar{q}_1^2}{\lambda} + \lambda A_1^2 - A_2^2 \\ A_2' &= a_{12} + \lambda A_1 A_2 + A_2 A_4 \\ A_4' &= -\bar{q}_4 - \lambda A_2^2 + A_4^2 \\ \\ A_3 &= -A_2 \end{aligned} \tag{4.18}$$

mit

$$\bar{q}_1^2 = \lambda(1 - a_{11})$$

$$\bar{q}_4^2 = (C^2 - a_{22}) \quad .$$

Bei tiefen Frequenzen ($f < 20$ kHz) und während des normalen Ionosphärenzustandes am Tage ist innerhalb der Eindringtiefe dieser Wellen

$$\begin{aligned} |A_2^2| &\ll |\lambda A_1^2| \\ |\lambda A_2^2| &\ll |A_4^2| \quad . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Die erste und dritte der Gl.(4.18) sind deshalb nahezu entkoppelt und gestatten eine Näherungslösung (Es wird wieder der Schichtaufbau aus parallelen homogenen Schichten vorausgesetzt.):

$$A_{1\nu} \approx \frac{\bar{q}_{1\nu}}{\lambda_\nu} \, \frac{1 - C_{1\nu} e^{-2jk\bar{q}_{1\nu} \, \Delta z_\nu}}{1 + C_{1\nu} e^{-2jk\bar{q}_{1\nu} \, \Delta z_\nu}} \tag{4.20}$$

+) Die Orientierung des Magnetfeldes innerhalb der y-z-Ebene bei vertikaler Inzidenz bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit.

mit

$$C_{1\nu} = \frac{\bar{q}_{1\nu} - A_{1\nu} + 1}{\bar{q}_{1\nu} + A_{1\nu} + 1}$$

und

$$A_{4\nu} \approx \bar{q}_{4\nu} \frac{1 - C_{4\nu} e^{-2jk\bar{q}_{4\nu} \Delta z_\nu}}{1 + C_{4\nu} e^{-2jkq_{4\nu} \Delta z_\nu}} \tag{4.21}$$

mit

$$C_{4\nu} = \frac{\bar{q}_{4\nu} - A_{4\nu} + 1}{\bar{q}_{4\nu} + A_{4\nu} + 1} .$$

Mit Hilfe der Gl.(4.20) und (4.21) gewinnt man als Lösung von A_2

$$A_{2\nu} = \frac{a_{12\nu}}{\bar{q}_{1\nu}^2 - \bar{q}_{4\nu}^2} (A_{4\nu} - \lambda_\nu A_{1\nu}) +$$

$$\frac{(1+C_{1\nu})(1+C_{4\nu}) e^{-(\bar{q}_{1\nu}+\bar{q}_{4\nu}) jk\Delta z_\nu}}{(1+C_{1\nu} e^{-2jk\bar{q}_{1\nu}\Delta z_\nu})(1+C_{4\nu} e^{-2jk\bar{q}_{4\nu}\Delta z_\nu})} \left(A_{2\nu+1} + \frac{a_{12\nu}}{\bar{q}_{1\nu}^2 - \bar{q}_{4\nu}^2} (\lambda_\nu A_{1\nu+1} - A_{4\nu+1})\right) \tag{4.22}$$

Bei senkrechter Inzidenz und vertikalem Magnetfeld ($S=0$, $1- m = 0$) ist

$$\lambda = 1$$
$$A_4 = A_1 . \tag{4.23}$$

Jetzt gelingt eine strenge Lösung durch die Zusammenfassung

$$A_1 \mp jA_2 = u_r . \tag{4.24}$$

Wir erhalten die beiden unabhängigen Differentialgleichungen

$$u_r' = -\mu_r^2 + u_r^2 \tag{4.25}$$

mit

$$\mu_r^2 = \frac{\bar{q}_1^2}{\lambda} \pm ja_{12} = 1 - \frac{X}{U \pm nY}$$

(Appleton-Hartree-Formel für vertikales Magnetfeld) und den Lösungen

$$u_{r\nu} = \sqrt{u_{r\nu}} \frac{1 - C_{r\nu} e^{-2jk\sqrt{u_{r\nu}}\, \Delta z_\nu}}{1 + C_{r\nu} e^{-2jk\sqrt{u_{r\nu}}\, \Delta z_\nu}} \tag{4.26}$$

mit

$$C_{r\nu} = \frac{\sqrt{u_{r\nu}} - u_{r\nu +1}}{\sqrt{u_r} + u_{r\nu +1}} \quad .$$

Die Transmissionsgleichung (3.3) lautet jetzt nach geeigneter Zusammenfassung

$$v'_{ir} = - u_r v_{ir} \tag{4.27}$$

mit

$$K_1 \pm K_2 = a_i \quad ; \qquad a_i \pm jb_i = v_{ir}$$

$$K_3 \pm K_4 = b_i \quad ; \qquad .$$

Die Lösung von Gl. (4.27) ist (siehe Gl.(4.14)

$$w_r = \frac{v_{ir}(z_n)}{v_{ir}(0)} \doteq e^{-jk\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \sqrt{u_{r\nu}}\, \Delta z_\nu} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{1 + C_{r\nu}}{1 + C_{r\nu} e^{-2jk\sqrt{u_{r\nu}}\, \Delta z_\nu}} \quad . \tag{4.28}$$

Daraus lassen sich mit Hilfe der Anfangswerte Gl. (3.7) die Elemente der Transmissionsmatrix $\underline{K}$ bestimmen:

$$K_1 = K_4 = \frac{1}{2} (w_1 + w_2) \tag{4.29}$$
$$K_2 = - K_3 = \frac{j}{2} (w_1 - w_2) \quad .$$

In der Gl.(4.28) kommt die Tatsache zum Ausdruck, daß sich die aus der Theorie der Kurzwellenausbreitung geläufigen ordentlichen und außerordentlichen Komponenten der elektrischen Feldstärke parallel zum Erdmagnetfeld ohne gegenseitige Kopplung ausbreiten können. Denn w_1 und w_2 sind die beiden Komponenten der Feldstärke, bezogen auf ihren Anfangswert in der Höhe z = 0.

5. Strenge Lösung von $\underline{A}$ für eine geschichtete anisotrope Ionosphäre

Will man zu einer allgemeinen Lösung der A_i für eine anisotrope Ionosphäre gelangen, die aus einer Anzahl von homogenen parallelen Schichten besteht, dann erweist sich der Weg über das Differentialgleichungssystem Gl.(2.8) als nicht mehr gangbar. Wir gehen deshalb von dem System der vier Differentialgleichungen für die Horizontalkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke aus (Gl.1.4). Das System hat innerhalb einer homogenen Schicht vier unabhängige Lösungen. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{r=1}^{4} a_r e^{-q_r \xi} \quad ; \quad Z_o H_y = \sum_{r=1}^{4} a_r c_r e^{-q_r \xi} \\ E_y &= \sum_{r=1}^{4} a_r b_r e^{-q_r \xi} \quad ; \quad -Z_o H_x = \sum_{r=1}^{4} a_r d_r e^{-q_r \xi} \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit

$$\xi = jkz \quad .$$

Die beiden ersten q_r gehören zu zwei aufwärts gehenden Wellen ($\mathrm{Re}\, q_r > 0, \mathrm{Im}\, q_r < 0$), die beiden letzten q_r gehören zu zwei abwärts gehenden Wellen ($\mathrm{Re}\, q_r < 0, \mathrm{Im}\, q_r > 0$).

Gehen wir mit dem Ansatz Gl.(5.1) in die Gl.(1.4) ein, so erhalten wir die Bedingungsgleichung für die q_r, die sogenannte Booker'sche Gleichung:

$$\begin{pmatrix} -q_r+Sa_{31} & Sa_{32} & \lambda & 0 \\ 0 & -q_r & 0 & 1 \\ 1-a_{11} & -a_{12} & -q_r+Sa_{13} & 0 \\ -a_{21} & C^2-a_{22} & Sa_{23} & -q_r \end{pmatrix} = 0 \tag{5.2}$$

oder explizit

$$\begin{aligned} & q_r^4 - q_r^3 S(a_{13}+a_{31}) + q_r^2 \left[S^2 a_{13}a_{31} - C^2 + a_{22} - \lambda(1-a_{11}) \right] \\ & + q_r S \left[a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32} + (C^2-a_{22})(a_{13}+a_{31}) \right] - S^2(a_{12}a_{31}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21}) \\ & - a_{23}a_{32}S^2(1-a_{11}) - S^2 a_{31}a_{13}(C^2-a_{22}) - \lambda a_{12}a_{21} + \lambda(1-a_{11})(C^2-a_{22}) \\ & = 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$(\lambda = C^2 - a_{33}S^2)$$

Im Falle der Ausbreitung in einer Ebene senkrecht zum Erdmagnetfeld (l=0) ist eine geschlossene Lösung der Gl.(5.2) möglich:

$$q_r^2 = C^2 - \frac{1}{\frac{U}{X} - \frac{m^2Y^2 \cdot\ n^2Y^2S^2}{2X(U-X)} \pm \sqrt{\left[\frac{m^2Y^2+n^2Y^2S^2}{2X(U-X)}\right]^2 + \frac{n^2Y^2(C^2U-X)}{(U-X)X^2}}} \qquad (5.4)$$

Die Appleton-Hartree-Formel ist ein Spezialfall der Gl.(5.4). Ersichtlich ist hier

$$\begin{aligned} q_3 &= -q_1 \\ q_4 &= -q_2 \end{aligned} \qquad (5.5)$$

Nachdem die q_r aus den Gl.(5.3) bestimmt sind, können die b_r, c_r und d_r aus den ersten drei Gleichungen (1.4) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} b_r &= \frac{\lambda\ (1-a_{11})-(q_r-Sa_{31})(q_r-Sa_{13})}{\lambda\ a_{12} - Sa_{32}(q_r-Sa_{13})} \\ c_r &= \frac{a_{12}(q_r-Sa_{31})-Sa_{32}(1-a_{11})}{\lambda\ a_{12} - Sa_{32}(q_r-Sa_{13})} \\ d_r &= q_r b_r \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Wir wollen uns nun auf die zwei Sonderfälle

a) vertikale Inzidenz, Magnetfeld in y-z-Ebene (S=0, l=0)

b) schräge Inzidenz, Magnetfeld senkrecht (l = m = 0)

beschränken.

Die q_r sind wieder durch die Gl.(5.4) definiert, und es gilt die Beziehung Gl. (5.5).

Die Werte der Gl.(5.6) reduzieren sich zu

$$\begin{aligned} b_r &= \frac{\lambda(1-a_{11})-q_r^2}{\lambda\, a_{12}} \\ c_r &= \frac{q_r}{\lambda} \\ d_r &= q_r b_r \end{aligned} \qquad (5.7)$$

und es ist

$$\begin{aligned} b_1 b_2 &= \frac{1}{\lambda} \\ A_3 &= -A_2 \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Wir fassen die beiden aufwärtsgehenden Wellen innerhalb einer homogenen Schicht durch die Matrix

$$\underline{\bar{f}}_\nu\,(\xi) = \begin{pmatrix} a_1 e^{-q_1\xi} \\ a_2 e^{-q_2\xi} \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

und die beiden abwärtsgehenden Wellen durch die Matrix

$$\underline{\bar{g}}_\nu\,(\xi) = \begin{pmatrix} a_3 e^{q_1\xi} \\ a_4 e^{q_2\xi} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

zusammen. Der Index "ν" soll andeuten, daß es sich um Wellen innerhalb der ν-ten Schicht handelt. Jetzt können wir die Gl.(5.1) in Matrixform schreiben:

$$\begin{pmatrix} \underline{M}_1 & \underline{M}_1 \\ \underline{M}_2 & -\underline{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\bar{f}}_\nu \\ \underline{\bar{g}}_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{e}_\nu \\ \underline{h}_\nu \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

mit

$$\underline{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \; ; \; \underline{M}_2 = \begin{pmatrix} q_1/\lambda & q_2/\lambda \\ q_1 b_1 & q_2 b_2 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Wir setzen voraus, daß wir den Scheinleitwert $A_{\nu+1}$ in der Höhe $\xi_{\nu+1}$ kennen, und schreiben die Gl.(5.11) für die obere Grenze der ν-ten Schicht in der Höhe $\xi_{\nu+1}$ unter Berücksichtigung der Gl.(2.1) explizit:

$$\begin{aligned} \underline{M}_1 \left\{ \underline{\bar{f}}_\nu(\xi_{\nu+1}) + \underline{\bar{g}}_\nu\,(\xi_{\nu+1}) \right\} &= \underline{e}_\nu\,(\xi_{\nu+1}) \\ \underline{M}_2 \left\{ \underline{\bar{f}}\,(\xi_{\nu+1}) - \underline{\bar{g}}_\nu\,(\xi_{\nu+1}) \right\} &= \underline{A}_{\nu+1}\underline{e}_\nu\,(\xi_{\nu+1}) \end{aligned} \tag{5.13}$$

An der unteren Grenze der ν-ten Schicht in der Höhe ξ_ν gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \underline{M}_1 \left\{ \underline{\bar{f}}_\nu\,(\xi_\nu) + \underline{\bar{g}}_\nu\,(\xi_\nu) \right\} &= \underline{e}_\nu\,(\xi_\nu) \\ \underline{M}_2 \left\{ \underline{\bar{f}}_\nu\,(\xi_\nu) - \underline{\bar{g}}_\nu\,(\xi_\nu) \right\} &= \underline{A}_\nu\,\underline{e}_\nu\,(\xi_\nu) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Aus den Gl.(5.9) und (5.10) folgt

$$\begin{aligned} \underline{\bar{f}}_\nu\,(\xi_{\nu+1}) &= \underline{W}\,\underline{\bar{f}}_\nu(\xi_\nu) \\ \underline{W}\,\underline{\bar{g}}_\nu\,(\xi_{\nu+1}) &= \underline{\bar{g}}_\nu\,(\xi_\nu) \end{aligned} \tag{5.15}$$

mit

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} e^{-q_1 \Delta\xi} & 0 \\ 0 & e^{-q_2 \Delta\xi} \end{pmatrix}$$

$$\Delta\xi = \xi_{\nu+1} - \xi_\nu \quad .$$

$\underline{e}_\nu(\xi_{\nu+1})$, $\underline{e}_\nu(\xi_\nu)$, $\underline{f}_\nu(\xi_{\nu+1})$, $\underline{g}_\nu(\xi_{\nu+1})$ und $\underline{g}_\nu(\xi_\nu)$ lassen sich aus den Gl.(5.13), (5.14) und (5.15) eliminieren, und wir erhalten

$$\left\{\underline{M}_2 - \underline{A}_\nu \underline{M}_1 - (\underline{M}_2 + \underline{A}_\nu \underline{M}_1)\underline{W}(\underline{M}_2 + \underline{A}_{\nu+1}\underline{M}_1)^{-1}(\underline{M}_2 - \underline{A}_{\nu+1}\underline{M}_1)\underline{W}\right\} \underline{f}_\nu(\xi_\nu) = \underline{0} \tag{5.16}$$

Da die Konstanten a_1 und a_2 in Gl.(5.9) unabhängig voneinander sind und jeden beliebigen Wert annehmen können, kann $\underline{f}_\nu(\xi_\nu)$ in Gl.(5.16) weggekürzt werden, und wir erhalten

$$\underline{A}_\nu = \underline{M}_2 \, (\underline{I} - \underline{V})(\underline{I} + \underline{V})^{-1} \, \underline{M}_1^{-1} \tag{5.17}$$

mit

$$\underline{V} = \underline{W}(\underline{M}_2 + \underline{A}_{\nu+1}\underline{M}_1)^{-1}(\underline{M}_2 - \underline{A}_{\nu+1}\underline{M}_1)\underline{W} \quad .$$

Sobald der Scheinleitwert $\underline{A}_{\nu+1}$ der $(n-\nu-1)$ Schichten in der Höhe $\xi_{\nu+1}$ bekannt ist, kann der Scheinleitwert $\underline{A}_\nu$ in der Höhe ξ_ν aus der Gl.(5.17) bestimmt werden. Auf diese Weise läßt sich grundsätzlich der Scheinleitwert und über die Gl.(2.9) auch die Reflexionsmatrix einer Ionosphäre, die aus einer beliebigen Anzahl von homogenen Schichten zusammengesetzt ist, sukzessiv bestimmen.

Die Elemente von $\underline{A}$ in Gl.(5.17) lauten explizit

$$A_{i\nu} = \frac{A_{i\infty}\left[B_{1\nu}(c_{1\nu}-1) + B_{2\nu}s_{1\nu}\right] - A^*_{i\infty}\left[B^*_{1\nu}(c_{2\nu}-1) + B^*_{2\nu}s_{2\nu}\right] + 2q_{1\nu}q_{2\nu}A_{i\nu+1}}{B_{2\nu}c_{1\nu} + B_{1\nu}s_{1\nu} + B^*_{2\nu}c_{2\nu} + B^*_{1\nu}s_{2\nu}} \tag{5.18}$$

mit

$$\left.\begin{matrix} A_{1\infty} \\ A^*_{1\infty} \end{matrix}\right\} = \frac{\pm q_1 b_2 - q_2 b_1}{\lambda\,(b_2 - b_1)} = \frac{1}{2\lambda}\left(q_2 \pm q_1 + \frac{\alpha}{q_2 \pm q_1}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} A_{2\infty} \\ A^*_{2\infty} \end{matrix}\right\} = \frac{q_2 \mp q_1}{\lambda\,(b_2 - b_1)} = -\frac{a_{12}}{q_2 \pm q_1}$$

$$\left.\begin{matrix} A_{4\infty} \\ A^*_{4\infty} \end{matrix}\right\} = \frac{q_2 b_2 \mp q_1 b_1}{(b_2 - b_1)} = \frac{1}{2}\left(q_2 \pm q_1 - \frac{\alpha}{q_2 \pm q_1}\right)$$

$$\alpha = a_{11} + a_{22} + S^2(a_{11} - a_{33} + a_{11}a_{33})$$

$$\left.\begin{matrix} B_{1\nu} \\ B^*_{1\nu} \end{matrix}\right\} = \lambda_\nu \left[A_{1\nu+1} \begin{pmatrix} A_{4\infty\nu} \\ A^*_{4\infty\nu} \end{pmatrix} + 2A_{2\nu+1} \begin{pmatrix} A_{2\infty\nu} \\ A^*_{2\infty\nu} \end{pmatrix} + A_{4\nu+1} \begin{pmatrix} A_{1\infty\nu} \\ A^*_{1\infty\nu} \end{pmatrix} \right]$$

$$\left.\begin{matrix} B_{2\nu} \\ B^*_{2\nu} \end{matrix}\right\} = q_{1\nu} q_{2\nu} \pm \lambda_\nu (A_{1\nu+1} A_{4\nu+1} + A^2_{2\nu+1})$$

$$\left.\begin{matrix} s_{1\nu} \\ s_{2\nu} \end{matrix}\right\} = \sinh\,(q_{1\nu} \pm q_{2\nu})\ \Delta\xi_\nu$$

$$\left.\begin{matrix} c_{1\nu} \\ c_{2\nu} \end{matrix}\right\} = \cosh\,(q_{1\nu} \pm q_{2\nu})\ \Delta\xi_\nu$$

$A_{i\infty\nu}$ sind die Scheinleitwerte der unendlich ausgedehnten homogenen Ionosphäre. Wir erhalten sie durch den Grenzübergang

$$\Delta\xi_\nu \longrightarrow \infty \quad .$$

Dann wird

$$c_{1\nu} = s_{1\nu} \longrightarrow \infty$$

und

$$\frac{c_{2\nu}}{c_{1\nu}}\ ;\ \frac{s_{2\nu}}{s_{1\nu}} \longrightarrow 0 \quad ,$$

und aus Gl.(5.18) folgt

$$A_{i\nu} \longrightarrow A_{i\infty\nu} \tag{5.19}$$

Kritische Kopplung wird der Fall

$$q_1 = q_2 \tag{5.20}$$

genannt. Bei vertikaler Inzidenz (S = 0) muß dazu die Bedingung

$$(a_{11} - a_{22})^2 = 4\, a_{12}^2 \quad ; \tag{5.21}$$

erfüllt sein. Sie ist erfüllt, falls gleichzeitig die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} X &= 1 && (\omega = \omega_o) \\ \frac{m^4 Y^2}{4n^2 Z^2} &= 1 && \left(\frac{m^2 \omega_H}{2n\,\nu} = 1\right) \end{aligned} \tag{5.22}$$

gelten. Es ist jetzt

$$b_1 = b_2 = 1 \quad . \tag{5.23}$$

Dann wird bei S = 0 ($\lambda = 1$)

$$\begin{aligned} &\lim_{q_{1\nu} \to q_{2\nu}} B^*_{1\nu}\, s_{2\nu} = a_{12\nu}\, \varrho_{\nu+1}\, \Delta\xi_\nu \\ &\lim_{q_{1\nu} \to q_{2\nu}} A^*_{i\nu} \left\{ B^*_{1\nu}\,(c_{2\nu} - 1) + B^*_{2\nu}\, s_2 \right\} \\ &\qquad = \delta_i\, a_{12\nu}\, \Delta\xi_\nu \left(B^*_{2\nu} + a_{12\nu}\, \varrho_{\nu+1} \frac{\Delta\xi_\nu}{2} \right) \end{aligned} \tag{5.24}$$

mit

$$\varrho_{\nu+1} = A_{1\nu+1} + 2A_{2\nu+1} - A_{4\nu+1}$$

$$\delta_1 = -1$$

$$\delta_2 = \delta_4 = 1 \quad ,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} A_{i\,kr\nu} = &\ \frac{2q_\nu^2 A_{i\nu+1} - \delta_i\, a_{12\nu}\, \Delta\xi_\nu \left(B^*_{2\nu} + a_{12\nu}\, \varrho_{\nu+1} \frac{\Delta\xi_\nu}{2}\right)}{N} \\ &+ \frac{2A_{i\infty\nu} \sinh q_\nu \Delta\xi_\nu \,(B_{1\nu} \sinh q_\nu \Delta\xi_\nu + B_{2\nu} \cosh q_\nu \Delta\xi_\nu)}{N} \end{aligned}$$

$$N = B_{2\nu} \cosh 2q_\nu \Delta\xi_\nu + B_{1\nu} \sinh 2q_\nu \Delta\xi_\nu + B^*_{2\nu} + a_{12}\, \varrho_{\nu+1}\, \Delta\xi_\nu \tag{5.25}$$

$$(q_{1\nu} = q_{2\nu} = q_\nu)$$

Für die isotrope Ionosphäre gilt

$$a_{12} = 0 \quad ; \quad \frac{q}{\lambda} = A_{1\infty}$$

$$A_2 = 0 \quad ; \quad q = A_{4\infty} \tag{5.26}$$

und aus Gl.(5.12) wird

$$A_{i\nu} = A_{i\infty\nu} \frac{A_{i\nu+1}C_\nu + A_{i\infty\nu}S_\nu}{A_{i\infty\nu}C_\nu + A_{i\nu+1}S_\nu} \tag{5.27}$$

$$\text{mit} \quad \left.\begin{matrix} S_\nu \\ C_\nu \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \cosh q_\nu \Delta\xi_\nu \\ \sinh q_\nu \Delta\xi_\nu \end{matrix}\right.$$

in Übereinstimmung mit Gl.(4.9).

II. Berechnung der Reflexionsfaktoren von Ionosphärenmodellen

6. Allgemeines zur Technik der Berechnung von Reflexionsfaktoren

6.1 Rechenmaschinen:

Der sicherste Weg zur Bestimmung von Reflexionsfaktoren eines inhomogenen anisotropen Ionosphärenmodells führt über das Gleichungssystem Gl.(2.8). Da die A_i und $a_{jl}(z)$ komplexe Größen sind, handelt es sich hier um ein System von acht gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Ein solches System bewältigt nur ein großer Digitalrechner (z.B. EDSAC 2 der Universität Cambridge (Barron, Budden 1959)). Der Telefunken-Analogrechner des Heinrich-Hertz-Instituts ist nur bedingt geeignet. Sobald die $a_{jl}(z)$ als stetige Funktionen der Höhe z gegeben sind, wie es den tatsächlichen Verhältnissen entspricht, kann das Gleichungssystem (2.8) selbst für die isotrope Ionosphäre nicht mehr mit dem Analogrechner gelöst werden, da die $a_{jl}(z)$ einen Bereich von mehreren Zehnerpotenzen durchlaufen und dadurch die Genauigkeit des Rechners überfordert wird. Es ist jedoch möglich, den Rechner für ein homogen geschichtetes Modell zu benutzen, wie es im Teil I dieser Arbeit zur Vorbereitung von manuellen Rechnungen benutzt wurde. Leider ist die Kapazität des Telefunken-Analogrechners nicht ausreichend, um selbst ein einfaches anisotropes Modell (schräge Inzidenz, Magnetfeld senkrecht) durchzurechnen. Wie Gl.(4.18) zeigt, haben wir dort sechs gekoppelte Differentialgleichungen. Wir benötigen zu deren Bewältigung insgesamt zehn Multiplizierglieder. Der Telefunken-Analogrechner hat aber nur deren acht. Die Näherung Gl.(4.19) reduziert das System Gl. (4.18) auf acht Multiplikationen variabler Größen. Diese Näherung läßt sich deshalb mit dem Analogrechner berechnen.

6.2 Manuelle Rechnungen:

Am einfachsten läßt sich ein homogen geschichtetes isotropes Modell berechnen, da wie die Gl.(4.9) und (4.2) zeigen, alle Größen aus Ausdrücken der Form

$$z_1 \frac{1 - z_2}{1 + z_2} \tag{6.1}$$

zusammengesetzt werden können. Nun ist aber

$$\frac{1 - z_2}{1 + z_2} = \text{tangh } u \tag{6.2}$$

$$\text{mit} \quad z_2 = e^{-2u}$$

die komplexe hyperbolische Tangensfunktion, die z.B. bei R. Hawelka (Hawelka, 1931) tabelliert ist. Für die nachfolgenden Rechnungen wurde ein Diagramm gezeichnet, aus dem direkt

$$Re^{j\phi} = \frac{1 - re^{j\varphi}}{1 + re^{j\varphi}} \tag{6.3}$$

abgelesen werden kann.

Die meiste Zeit bei der Berechnung der Reflexionsfaktoren nimmt die Bestimmung der q und $A_{i\infty}$ ein. Auch diese Werte wird man zweckmäßigerweise einer graphischen Darstellung entnehmen. Die Genauigkeit der Rechnung hängt dann von der Genauigkeit ab, mit der man aus den graphischen Darstellungen die einzelnen Daten ablesen kann. Im allgemeinen erreicht man eine absolute Genauigkeit von etwa 0,03 beim Betrag und eine Winkelgenauigkeit von etwa 5^0. Der prozentuale Fehler wird umso größer, je kleiner der Betrag des Reflexionskoeffizienten ist. Bei steilem oder schrägem Einfall kann der Reflexionsfaktor (dem Betrage nach) kleiner als 0,05 werden und der Fehler dementsprechend über 100% erreichen. Diese Tatsache schränkt die Verwendung der in dieser Arbeit benutzten Methode praktisch auf schrägen Einfall und niedrige Frequenzen ein, auf Fälle also, bei denen der Betrag des Reflexionsfaktors größer als 0,05 ist.

Die Berechnung der Reflexionsfaktoren der anisotropen geschichteten Ionosphäre ist sehr viel mühsamer. Zweckmässigerweise geht man von der Gl.(5.18) aus. Auch hier nimmt die Bestimmung der q_r und $A_{i\infty}$ sowie $A^*_{i\infty}$ die meiste Zeit in Anspruch, so daß es empfehlenswert ist, diese vorher graphisch darzustellen. Die Addition der in Gl.(5.18) vorkommenden komplexen Größen erfolgte bei den nachfolgenden Rechnungen ebenfalls graphisch mit Hilfe von Millimeterpapier, Winkelmesser und Lineal. Dieses Verfahren hat sich als nützlich und ausreichend erwiesen.

7. Zahl und Dimensionen der homogenen Schichten

Das im Teil I dieser Arbeit behandelte Ionosphärenmodell, das aus einer beliebigen Anzahl überlagerter homogener Schichten endlicher Dicke besteht, ist nur dann eine vernünftige Approximation der tatsächlichen Verhältnisse, wenn das Modell eine genügende Anzahl genügender Dicke aufweist. Andererseits wird man bestrebt sein, aus Gründen des Arbeitsaufwandes die Anzahl der Schichten durch die Wahl möglichst großer Schichtdicken auf ein Minimum zu reduzieren. Es soll nun eine Abschätzung erfolgen, was man unter genügender Anzahl und genügender Dicke zu verstehen hat.

Zur Abschätzung der erforderlichen Dicke betrachten wir eine isolierte isotrope Schicht der Dicke Δz, die auf beiden Seiten von Vakuum umgeben ist. Ihr Reflexionsfaktor ist

$$R_i = R_{i\infty} \frac{1 - e^{-2jkq\,\Delta z}}{1 - R_{i\infty}^2\, e^{-2jkq\,\Delta z}} \tag{7.1}$$

Der Betrag von R_i durchläuft eine Reihe von Maxima und Minima. Das erste Minimum liegt in der Nähe von

$$k \Delta z_{min} \operatorname{Re} q = \pi \tag{7.2}$$

in Abhängigkeit von der Schichtdicke Δz, der Frequenz und den Parametern der Schicht.

Solange,

$$\operatorname{Re} q \leqq C \qquad (C = \cos \vartheta) \tag{7.3}$$

ist, gilt die Ungleichung

$$\Delta z_{min} \leqq \frac{\lambda}{2\,C} \quad . \tag{7.4}$$

(λ ist hier die Wellenlänge.)

Bei einer Schichtdecke von

$$\Delta z < \frac{\lambda}{2} \tag{7.5}$$

befinden wir uns für alle Einfallswinkel ϑ diesseits des ersten Minimums.

Ist

$$\operatorname{Re} q > C \quad , \tag{7.6}$$

dann wird in den meisten praktischen Fällen $\operatorname{Im} q$ von der gleichen Größenordnung wie $\operatorname{Re} q$ sein, und die Welle ist vor Erreichung des ersten Minimums abgeklungen.

Die Ungleichung (7.5) ist erst recht erfüllt, wenn sich an der oberen Grenze der isolierten Schicht eine zweite Schicht mit benachbarten Parametern anschließt, wie dies bei den tatsächlichen Rechnungen der Fall ist. Durch die Wahl von Schichtdicken, die kleiner als die halbe Wellenlänge der benutzten Frequenz sind, vermeiden wir deshalb Zweideutigkeiten und scheinbare frequenzabhängige "Löcher" in der Ionosphäre.

Andererseits wird man bestrebt sein, Δz so klein zu wählen, daß das Schichtmodell eine genügende Approximation des gewünschten Ionosphärenmodells ist. Als Faustregel kann man gelten lassen, daß die Parameter benachbarter Schichten sich nicht mehr als 100% voneinander unterscheiden sollten. Die Brauchbarkeit einer solchen Approximation wird im Abschnitt 10 durch ein ~~Beispiel~~ erwiesen. Die im Teil I abgeleiteten Formeln für die A_i bzw. R_i setzen voraus, daß über die gesamte Ionosphäre, am oberen Rande angefangen, integriert wird. Dies ist arbeitsmäßig nicht möglich, aber auch nicht nötig, wie wir zeigen werden.

Am Tage befindet sich das untere Gebiet der Ionosphäre, in der die Reflexion der Längstwellen stattfindet, in solchen Höhen (etwa 70 km), daß dort die Stoßzahl ν groß gegenüber der Frequenz der Wellen und noch größer als die Gyrofrequenz ω_H ist:

$$\begin{aligned} \nu &\gg \omega \\ \nu &> \omega_H \end{aligned} \tag{7.7}$$

Dieser Teil der Ionosphäre verhält sich gegenüber Längstwellen in erster Näherung wie eine isotrope Ionosphäre, und es wird (siehe Gl.(5.11))

$$q^2 = C^2 - \frac{X}{U} \approx C^2 - j\,\frac{\omega_0^2}{\omega\nu} \quad . \tag{7.8}$$

In der unteren Ionosphäre nimmt die Elektronendichte mit wachsender Höhe schnell zu, und es wird daher ($\omega_0^2 \sim N_e$)

$$q \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega\nu}} \quad . \tag{7.9}$$

Die erste homogene Schicht, in der Gl. (7.9) gilt und in der innerhalb einer Schichtdicke Δz die Exponentialausdrücke in Gl. (4.9) oder (7.1) gegen Null gehen, verhält sich wie eine nach oben unendlich ausgedehnte Schicht:

$$A_i \longrightarrow A_{i\infty} \tag{7.10}$$

Die Wellen sind also (meist innerhalb einer Wellenlänge) so stark abgeklungen, daß das obere Gebiet der Ionosphäre keine Rückwirkung auf deren Reflexion mehr hat.

Nachts befindet sich der untere Rand der Ionosphäre in etwa 90 km Höhe. Die Bedingungen der Gl.(7.7) sind dort nicht mehr erfüllt. Wir müssen jetzt das gesamte Gebiet der Ionosphäre bis zu einer solchen Höhe, in der die Ungleichung

$$\omega\,\omega_H \ll \omega_0^2 \tag{7.11}$$

gilt, in die Integration einbeziehen. In Höhen, in denen die Ungleichung (7.11) erfüllt ist, wird aus der Gl.(5.4)

$$q_r^2 \approx \mp \frac{X}{Y} = \mp \frac{\omega_o^2}{\omega\omega_H} \quad . \qquad (7.12)$$

(Infolge unserer Beschränkung auf Längstwellen ist immer

$$Y \gg 1 \quad , \qquad (7.13)$$

und in den hier in Frage kommenden Höhen gilt außerdem

$$Z \ll 1 \quad .) \qquad (7.14)$$

Während die ordentliche Komponente ($q_1 = - j \frac{\omega_o}{\omega\omega_H}$) bei ihrem Eindringen in ein solches Gebiet stark gedämpft wird, ist für die außerordentliche Welle ($q_2 = \frac{\omega_o}{\sqrt{\omega\omega_H}}$) eine Ausbreitung parallel zu den Kraftlinien des Erdmagnetfeldes möglich. Das ist die bekannte Whistler-Ausbreitung (Storey, 1953).

Gl.(5.18) reduziert sich jetzt zur Gl. (4.24) (Ausbreitung parallel zum Magnetfeld), und wegen

$$e^{-2jkq_1 \Delta z_\nu} \approx e^{-2ka_\nu \Delta z_\nu} \longrightarrow o$$

$$j \sin q_2 k \Delta z_\nu \approx j \sin a_\nu k \Delta z_\nu = S_\nu \qquad (7.15)$$

$$\cos q_2 k \Delta z_\nu \approx \cos a_\nu k \Delta z_\nu = C_\nu$$

mit

$$a = \frac{\omega_o}{\sqrt{\omega\omega_H}}$$

wird

$$u_{1\nu} \approx 1 \qquad (7.16)$$

$$u_{2\nu} \approx \frac{a_\nu S_\nu - j a_{\nu+1} u_{2\nu+1}}{a_{\nu+1} u_{2\nu+1} S_\nu - j a_\nu C_\nu} \quad .$$

Da nun in diesen Höhen a_ν sich innerhalb einer Wellenlänge im allgemeinen nur wenig ändert, gilt auch

$$u_{2\nu} \approx 1 \quad , \qquad (7.17)$$

und wir erhalten für die oberste zu berücksichtigende Schicht

$$A_{1n} \approx \frac{1}{2} \quad (q_{1n} + q_{2n}) = \frac{a_n}{2} (1-j) \approx A_{4n}$$

$$A_{2n} \approx \frac{j}{2} \quad (q_{1n} - q_{2n}) \approx A_{1n} \qquad (7.18)$$

Im Gegensatz zur Tagesausbreitung, bei der, wie wir gesehen haben, die Wellen in den untersten Gebieten der Ionosphäre praktisch vollständig absorbiert werden und deshalb der Zustand der oberen Ionosphäre keine Rückwirkung auf die Reflexion der Längstwellen zeitigt, dringen unter den nächtlichen Ausbreitungsbedingungen die Wellen bis in große Höhen vor, und ihre Reflexion kann wesentlich von den Verhältnissen innerhalb der hohen Ionosphäre beeinflußt werden.

Anhand der Näherungslösung Gl.(4.20) und (4.21) kann abgelesen werden, wie das Erdmagnetfeld dieses unterschiedliche Verhalten verursacht. Die für die Dämpfung maßgeblichen Faktoren sind dort

$$\mathrm{Im}\ \bar{q}_1 = \mathrm{Im} \sqrt{\lambda (1-a_{11})}$$

$$\mathrm{Im}\ \bar{q}_4 = \mathrm{Im} \sqrt{(C^2-a_{22})} \quad . \qquad (7.19)$$

Wir setzen den Zustand der tiefen Ionosphäre am Tage voraus:

$$Z \gg 1 \qquad (7.20)$$

und setzen

$$\frac{X}{U} = j\varkappa$$

$$\frac{Y}{U} = jp \quad . \qquad (7.21)$$

Dann ist für $\varkappa \gg 1$

$$\bar{q}_1 \approx \sqrt{1 - j \frac{\varkappa}{1+p^2}}$$

$$\bar{q}_4 \approx \sqrt{C^2 - j \frac{\varkappa}{1+p^2}} \qquad (7.22)$$

Die Leitfähigkeit der isotropen Ionosphäre

$$\sigma = \varepsilon_0 \omega \varkappa \qquad (7.23)$$

wird also durch die Anwesenheit des Erdmagnetfeldes um den Faktor $\frac{1}{1+p^2}$ herabgesetzt und der Dämpfungsfaktor entsprechend vermindert. (vergl. Gl.(7.8) und (7.9).)

Die untere Grenze des Integrationsgebietes ist dort erreicht, wo

$$\mu \approx 1 \qquad (7.24)$$

wird. Das entspricht Elektronendichten von etwa

$$N_e < 10 \text{ cm}^{-3} \qquad (7.25)$$

8. Die scheinbare Reflexionshöhe

Bisher wurde von der Reflexion ebener Wellen am horizontal geschichteten Medium gesprochen. Tatsächlich handelt es sich jedoch um von einem Sender abgestrahlte und in der Höhe h reflektierte Kugelwellen, die nach einer endlichen Laufzeit an einem im Abstand d vom Sender entfernten Empfänger unter dem Einfallswinkel ϑ_0 eintreffen (siehe Abb. 3).

Es sei Δd die Versetzung des Funkstrahls nach seiner Reflexion an der unteren Grenze der Ionosphäre in der Höhe h. Dann versteht man unter der scheinbaren Höhe h' diejenige Höhe, die vom gleichen Funkstrahl erreicht worden wäre, falls er sich weiter geradlinig ausgebreitet hätte und dort ideal reflektiert worden wäre. Definitionsgemäß ist der dabei zurückgelegte Phasenweg

$$\frac{2 \Delta h}{\cos \vartheta_0} \qquad (8.1)$$

gleich dem tatsächlichen Phasenweg der Welle von A nach C.

Wir betrachten eine ebene Welle, die in der Höhe h auf die Untergrenze einer isotropen Ionosphäre auftritt und dort reflektiert wird. Der Reflexionsfaktor in der Höhe h sei

$$R = |R| \, e^{j \emptyset} \qquad (8.2)$$

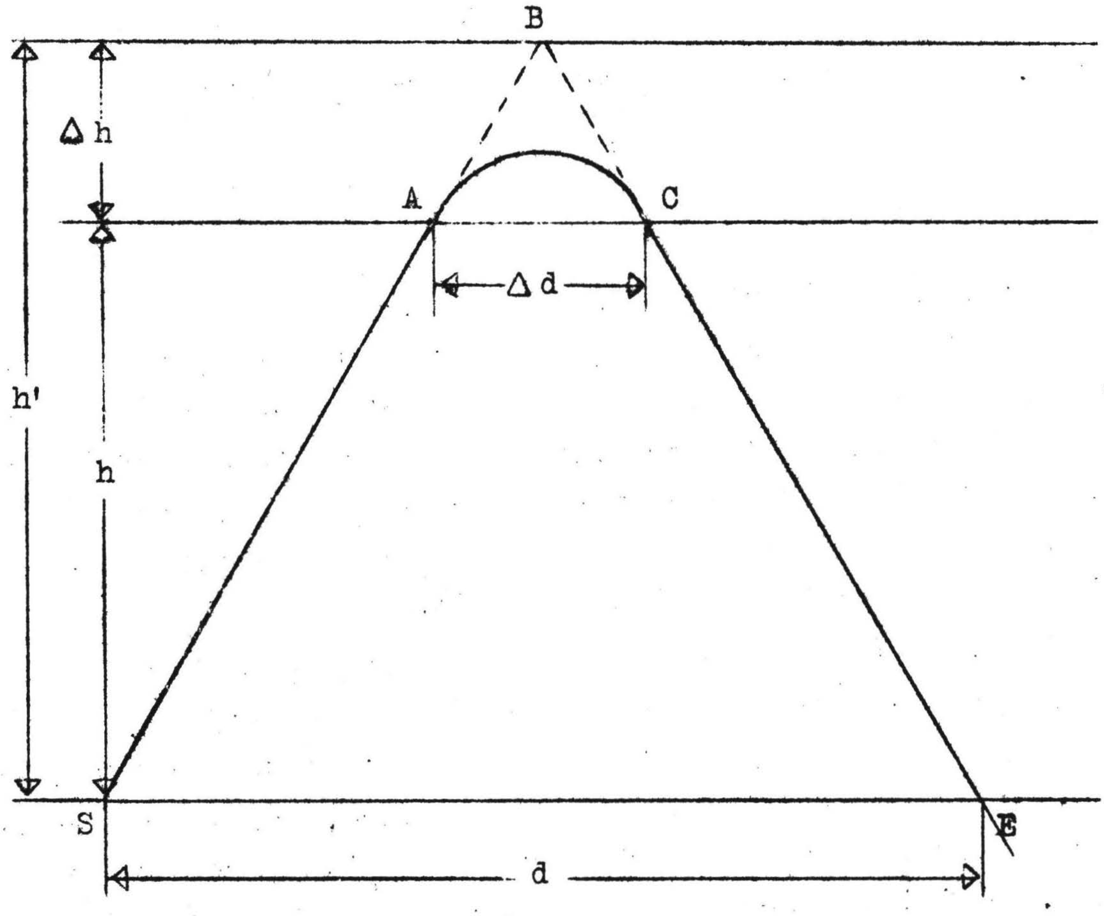


Abb.3: Weg der Wellenfront einer vom Sender S abgestrahlten Welle, die am Empfangsort E eintrifft. Die gestrichelte Linie gibt den Weg eines unter dem gleichen Winkel abgestrahlten Funkstrahls an, der die gleiche Phasenlaufzeit braucht und in der Höhe h' reflektiert wird.

Es existiere eine Ersatz-Ionosphäre in der Höhe h', deren Reflexionsfaktor den gleichen Betrag R , aber die Phase Null (für vertikale Polarisation) oder π (für horizontale Polarisation) habe. In Bezug auf die Höhe h ist deren Reflexionsfaktor

$$\bar{R} = \pm |R| \, e^{-2jkC\,\Delta h} \quad . \tag{8.3}$$

In Höhen $z \leq h$ verhalten sich beide Schichten ebenen Wellen gegenüber gleichartig, wenn die Bedingung

$$\Delta h = - \frac{1}{2k} \, \frac{\emptyset - \emptyset\,(C = 0)}{C} \tag{8.4}$$

erfüllt ist.

Eine genauere Rechnung zeigt, daß die dominierende Welle der an der Ionosphäre reflektierten und zum Punkte E gelangenden Kugelwelle aus einer solchen Richtung kommt, für die deren Phase einen Extremwert durchläuft (siehe z.B. (Budden, 1961)).

Die Phase der die Strecke SBE in Abb. 3 durchlaufenden Welle ist

$$\begin{aligned} \chi &= \emptyset + 2k\,\Delta h \, \cos\vartheta - 2kh' \cos\vartheta - 2kd \sin\vartheta + \omega t = \\ &\emptyset - 2kh \cos\vartheta - 2kd \sin\vartheta + \omega t \quad . \end{aligned} \tag{8.5}$$

Sie ist identisch mit der Phase der Welle, die den wirklichen Weg (ausgezogene Linie in Abb.3) zurückgelegt hat.

Aus der Bedingung

$$\frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} = 0 \tag{8.6}$$

folgt

$$\Delta h = - \frac{1}{2k} \, \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\vartheta} \Bigg|_{\vartheta = \vartheta_0} \quad , \tag{8.7}$$

wobei von der aus der Geometrie der Abb.3 ersichtlichen Beziehung

$$h' \sin\vartheta_0 = d \cos\vartheta_0 \tag{8.8}$$

Gebrauch gemacht worden ist.

In vielen praktischen Fällen ist für größere Einfallswinkel ($C < 0{,}5$)

$$C \sim \emptyset \quad , \tag{8.9}$$

so daß jetzt Gl.(8.7) identisch mit Gl.(8.4) wird.

Gl. (8.7) ist nur für die isotrope Ionosphäre abgeleitet. Ihr Gebrauch bei der anisotropen Ionosphäre ist deshalb nur mit Vorbehalt möglich.

9. Das Ionosphärenmodell

Die Reflexionsfaktoren hängen von den Ionosphärenparametern Elektronendichte $N_e(z)$, Stoßzahl ν (z) und Erdmagnetfeld $\vec{H}_o(z)$ ab. Um zu einer übersehbaren Mannigfaltigkeit von Ionosphärenmodellen zu kommen, werden wir rigorose Einschränkungen in der Höhenabhängigkeit dieser Parameter vornehmen müssen.

Das Erdmagnetfeld ist bekanntlich in guter Näherung ein Dipolfeld. Seine Horizontal- und Vertikalkomponente lauten

$$\begin{aligned} H_{ox} &= \frac{M}{r^3} \cos\varphi \\ H_{oz} &= -\frac{2M}{r^3} \sin\varphi \end{aligned} \qquad (9.1)$$

φ = geomagnetische Breite
r = Abstand vom Erdmittelpunkt
M = Dipolmoment des Erdmagnetfeldes.

Innerhalb eines Höhenbereiches von 100 km ändert sich $\vec{H}_o$ nicht merklich. Wir werden also $\vec{H}_o$ stets als konstant und nicht von z abhängig behandeln.

In mittleren und höheren Breiten ($\varphi > 45^o$) ist

$$\frac{H_{ox}^2}{H_{oz}^2} = \frac{1}{4} \cot g^2 \varphi < 0,25 \qquad (9.2)$$

Wie aus Gl. (5.1) ersichtlich, ist hier die Näherung

$$\begin{aligned} l &= m = 0 \\ n &= \pm 1 \end{aligned} \qquad (9.3)$$

vertretbar, und wir können unsere spezielle Lösung (l=m=0) im Teil I benutzen. Wegen

$$e < 0 \qquad H_{oz} < 0 \tag{9.4}$$

ist in nördlichen Breiten

$$n > 0 \tag{9.5}$$

(siehe die Definition der Gyrofrequenz in Gl.(1.6).
In 100 km Höhe und über Mitteleuropa ist

$$\varphi \approx 50^{0} \qquad H_{o} \approx 0{,}37 \text{ Ampère cm}^{-1} \quad , \tag{9.6}$$

also

$$\omega_{H} \approx 8 \cdot 10^{6} \text{ sec}^{-1} \quad . \tag{9.7}$$

Dieser Wert in Verbindung mit

$$n = 1 \tag{9.8}$$

wird den folgenden anisotropen Rechnungen zugrundegelegt werden. Für die Stoßzahl ν liegen eine Reihe von experimentellen und theoretischen Daten vor. Wir wählen ein Stoßzahlprofil nach Nicolet (Nicolet, 1959), das in der Abb. 4 gezeichnet ist. Im Höhenbereich zwischen 60 und 90 km kann dieses Profil durch die Exponentialfunktion

$$\nu = \nu_{o} e^{-\frac{(z-z_{o})}{H}} \tag{9.9}$$

mit

$$\nu_{o} = 10^{7} \text{ sec}^{-1}$$
$$z_{o} = 70 \text{ km}$$
$$H = 8 \text{ km (Skalenhöhe)}$$

gut approximiert werden (siehe Abb.4 auf Seite 53)

Über tages- und jahreszeitliche Schwankungen von ν (bzw. H) existieren bisher nur wenige Ergebnisse (z.B. (Greenhow, Lovell 1960)). Es ist damit zu rechnen, daß H wenigstens um 10% schwankt. Die vorliegende Arbeit soll gerade die Voraussetzungen dafür schaffen, Variationen von ν oder H aus Längstwellenregistrierungen zu ermitteln.

Da die Reflexion der Längstwellen im wesentlichen in einem beschränkten Gebiet der Ionosphäre stattfindet (größenordnungsmäßig von den Dimensionen einer Wellenlänge), können wir in diesem Teilgebiet die Elektronenproduktion durch den Chapman'schen Ansatz für eine monochromatische Strahlung approximieren:

$$I = I_m \, e^{1 + \frac{z_m - z}{H} - e^{\frac{z_m - z}{H}}} \qquad . \qquad (9.10)$$

Wie aus der Abb. 4 ersichtlich ist, gilt unterhalb von 90 km das Exponentialgesetz Gl. (9.9) auch für die Luftdichte. Die Skalenhöhe H ist deshalb von gleichem Wert wie in Gl. (9.9).

I_m ist das Maximum der Elektronenproduktion in der Höhe

$$z_m = z_{om} - H \ln \cos \chi \quad (\chi < 80^0) \ . \qquad (9.11).$$

z_{om} ist die Maximalhöhe der Elektronenproduktion bei senkrechtem Einfall der Sonnenstrahlen (Zenitdistanz der Sonne: $\chi = 0^0$).

Am Tage ändert sich die Elektronendichte nur langsam mit der Tageszeit. Aus der Bilanzgleichung

$$\frac{dN_e}{dt} = I - \gamma \, N_e^m \approx 0 \qquad (9.12)$$

gewinnt man daher mit Gl. (9.10) die Beziehung für die Höhenabhängigkeit von N_e :

$$N_e = \sqrt[m]{\frac{I}{\gamma}} \quad . \qquad (9.13)$$

Der Fall

$$m = 1 \qquad (\gamma = \beta) \qquad (9.14)$$

wird effektive Anlagerung genannt. Der Fall

$$m = 2 \qquad (\gamma = \alpha) \qquad (9.15)$$

entspricht einer effektiven Rekombination.

Oberhalb von etwa 90 km Höhe ist Rekombination vorherrschend (Ratcliffe, Weekes 1960). Unterhalb von etwa 80 km Höhe scheint ein effektives Anlagerungsgesetz gültig zu sein (Taubenheim 1962), (Volland 1961 b).

Die Luftdichte ϱ unterhalb 80 km ist so groß, daß hier eine Proportionalität zwischen α bzw. β und ϱ zu erwarten ist:

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \sim e^{-\frac{z-z_m}{H}} . \qquad (9.16)$$

Wir können daher die Gl. (9.13) schreiben:

$$N_e = N_{m\alpha}\, e^{\frac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{z_{m\alpha}-z}{H}}\right)} \qquad (9.17)$$

mit

$$N_{m\alpha} = \sqrt{\frac{I_m}{\alpha_m}} \qquad \text{(effektive Rekombination).}$$

oder

$$N_e = N_{m\beta}\, e^{\left(1 - e^{\frac{z_{m\beta}-z}{H}}\right)} \qquad (9.18)$$

mit

$$N_{m\beta} = \frac{I_m}{\beta_m} \qquad \text{(effektive Anlagerung).}$$

Durch die Transformation

$$\begin{aligned} N_{m\alpha} &= \sqrt{e}\; N_{m\beta} = 1,65\, N_m \\ z_{m\alpha} &= z_{m\beta} + H \ln 2 = z_{m\beta} + 0,693\, H \end{aligned} \qquad (9.19)$$

kann die Gl. (9.17) in die Gl.(9.18) überführt werden. Sowohl Anlagerung als auch Rekombination führen also bei Gültigkeit der Beziehung Gl. (9.16) zum gleichen Elektronendichteprofil.

Ein Unterschied macht sich erst dann bemerkbar, wenn die zeitliche Änderung von N_e in der Bilanzgleichung (Gl. 9.12) nicht mehr vernachlässigt werden kann. Das ist unter den nächtlichen Ausbreitungsbedingungen und bei Sonneneruptionen der Fall. Aus der Untersuchung des Einflusses von Sonneneruption auf die Längstwellenausbreitung ist β auch bestimmt worden (Volland 1961 b).

Für die Ausbreitungsverhältnisse am Tage werden wir uns also auf die beiden noch offenen Parameter N_m und z_m beschränken. Wir werden feststellen, daß die Form des Schichtprofils (bei Schrägausbreitung) einen relativ geringen Einfluß auf den Betrag von R, aber einen erheblichen Einfluß auf seine Phase, d.h. auf die scheinbare Reflexionshöhe h', hat. Das ermutigt uns, für die nächtlichen Ausbreitungsverhältnisse ein gleiches Schichtprofil (Gl.(9.17) oder (9.18)) zu wählen, obgleich die gemachten Voraussetzungen dann nicht mehr erfüllt sind. Wir erhalten auf diese Weise einen brauchbaren Wert für den Betrag des Reflexionsfaktors und verzichten auf die Bestimmung der scheinbaren Höhe, die nachts infolge der starken Anisotropie ohnehin problematisch ist.

Überhaupt haben wir den Eindruck, daß das Dilemma, in dem wir uns im Verlaufe der ganzen Untersuchung befinden, nicht so ausweglos ist, wie es ursprünglich erscheint, das Dilemma nämlich, daß wir die Parametergrößen, die wir aus den Längstwellenregistrierungen erst bestimmen wollen, schon als bekannt voraussetzen müssen, um unsere Reflexionsfaktoren berechnen zu können.

10. Reflexionsfaktoren von isotropen inhomogenen Ionosphärenmodellen

Für die homogene Ionosphäre läßt sich zeigen, daß ein merkbarer Unterschied in den Reflexionsfaktoren gegenüber der isotropen Ionosphäre ($p = 0$) erst für die Werte von

$$p > 1$$

sichtbar zu werden beginnt, und zwar im Bereich $\varkappa > 1$ wesentlich stärker als im Bereich $\varkappa < 1$ (p und $\varkappa$ siehe (Gl.7.21)). Die Bedingung

$$p < 1 \qquad (\omega_H < \nu) \tag{10.1}$$

ist aber für die tiefe Ionosphäre am Tage erfüllt. Die isotrope Ionosphäre ist deshalb für die Ausbreitungsverhältnisse am Tage eine vertretbare Näherung. Insbesondere ist sie brauchbar bei Sonneneruptionseffekten, die sich durch eine Verlagerung der Untergrenze der Ionosphäre in tiefere Regionen auszeichnen.

Als Modell einer isotropen Ionosphäre wurde das Elektronendichteprofil einer Chapman-Schicht

$$N_e = N_m \, e^{\frac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{z_m - z}{H}}\right)} \qquad (10.2)$$

und ein exponentiell verlaufendes Stoßzahlprofil

$$\nu = \nu_o \, e^{\frac{z_o - z}{H}} \qquad (10.3)$$

mit

$$\nu_o = 10^7 \text{ sec}^{-1}$$
$$z_o = 70 \text{ km}$$

und einer Skalenhöhe von

$$H = 8 \text{ km} \qquad (10.4)$$

gewählt (siehe Gl.(9.9 und 9.17).

Die Berechnung der Reflexionsfaktoren erfolgte manuell über die Gl.(4.9) und (4.2). Ein Teil der Rechnungen wurde mit Hilfe des Digitalrechners Z 22 des TU-Recheninstituts durchgeführt.

Beim Digitalrechner wurde ein Runge-Kutta-Verfahren mit einer Schrittweite von $\Delta z \leq 500$ m angewandt.+) Es lieferte eine strenge Lösung der Reflexionsfaktoren.

Integriert wurde beim Digitalrechner von z_m nach unten bis zu einer solchen Höhe, in der $N_e < 1$ ist. Oberhalb von z_m wurde eine nach oben unendlich ausgedehnte homogene Schicht mit den Parametern

$$N_e = 10^4 \text{ cm}^{-3}$$
$$\nu = 10^6 \text{ sec}^{-1} \qquad (10.5)$$

angenommen. Diese Schicht macht sich nur bei sehr kleinen Werten N_m bemerkbar, wie noch gezeigt werden wird.

+) Die Programmierung und Rechnung am Digitalrechner Z 22 erfolgte durch die Herren cand.ing.Gürtler und cand.ing.Schneider. Beiden Herren sei dafür herzlich gedankt.

Für die manuellen Rechnungen wurde das Ionosphärenmodell durch eine Anzahl homogener Schichten der Dicke Δz und den Parametern $N(z_m - n\,\Delta z)$ und $\nu\,(z_m - n\,\Delta z)$ approximiert. Die Schichten lagen zwischen den Höhen $z_m - \frac{2n-1}{2}\,\Delta z$ und $z_m - \frac{2n+1}{2}\,\Delta z$; $n = \ldots -2, -1, 0.1, 2 \ldots$ (siehe Abb. 5).

Die Schichtdicke betrug

$$\begin{aligned} \Delta z &= 4 \text{ km für } \omega \leqq 2 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1} \\ \Delta z &= 3 \text{ km für } \omega = 3 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \tag{10.6}$$

Tab. 2 gibt diese Schichtdicken in Prozenten der Wellenlängen der verschiedenen Frequenzen an.

Kreisfrequenz $\omega \cdot 10^5$ sec^{-1}	0,5	1	2	3	2	3
benutzte Schichtdicke, in Prozenten der Wellenlänge ausgedrückt	0,11	0,21	0,42	0,48	(0,32)	(0,32)

Tab. 2

Für senkrechte Inzidenz (C = 0) wurden abweichend von den Schichtdicken in Gl. (10.6) die folgenden Werte gewählt:

$$\begin{aligned} \Delta z &= 3 \text{ km für } \omega = 2 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1} \\ \Delta z &= 2 \text{ km für } \omega = 3 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \tag{10.7}$$

(Diese Schichtdicken, in Prozenten der Wellenlängen ausgedrückt, sind in der Tab. 2 in Klammern hinzugefügt.),

da sich herausgestellt hatte, daß für diese beiden Frequenzen die Schichtdicken der Gl. (10.6) zu einer ungenügenden Übereinstimmung mit den mittels Digitalrechner erhaltenen Werten bei C = 0 geführt hatten. Grundsätzlich hat sich das Kriterium Gl. (7.5) (Schichtdicke kleiner als eine halbe Wellenlänge) als vernünftig erwiesen.

Integriert wurde von oben nach unten bis in ein Gebiet hinein, in dem

$$N_e < 10 \text{ cm}^{-3} \tag{10.8}$$

gilt. Bei der Wahl der oberen Grenze wurden die Überlegungen, die sich durch die Gl. (7.9) und (7.10) manifestieren, berück-

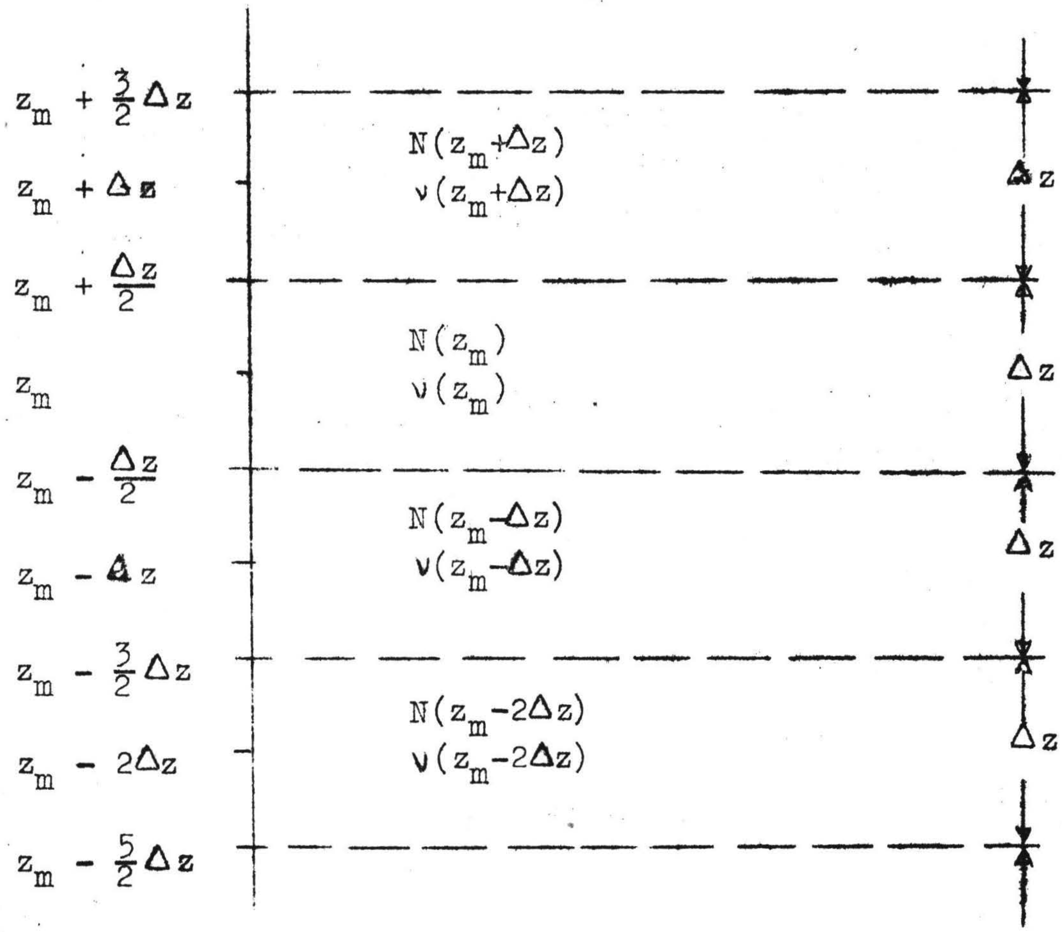


Abb.5: Zur Wahl der Parameter beim Schichtaufbau

sichtigt. Im allgemeinen wurde bei $z_m + \frac{\Delta z}{2}$ angefangen.
In allen Fällen wurde von der Ungleichung

$$z \gg 1$$

Gebrauch gemacht.
Die Abb. 6 u. 7+) zeigen die mittels Digitalrechner berechneten Reflexionsfaktoren für vertikale Polarisation R_1 nach Betrag und Phase in Abhängigkeit von $C = \cos\vartheta$ für die Frequenz $\omega = 10^{-5} \sec^{-1}$ und mit den Parametern

$z_m = 75$ km
$N_m = 10^2,\ 3 \cdot 10^2,\ 10^3,\ 3 \cdot 10^3,\ 10^4,\ 3 \cdot 10^4,\ 10^5 \quad cm^{-3}$
(obere Abbildungen)

sowie

$N_m = 300\ cm^{-3}$
$z_m = 75, 80, 85, 90$ km
(untere Abbildungen)

Die Phase ist auf eine Referenzhöhe von

$$z_{ref} = z_m - 20 \text{ km} \qquad (10.9)$$

bezogen.
Abb. 8 zeigt die ebenfalls mit dem Digitalrechner berechneten Reflexionsfaktoren R_1 für die Frequenz $\omega = 3 \cdot 10^5 \sec^{-1}$ und die Parameter

$z_m = 75$ km
$N_m = 10^2,\ 3 \cdot 10^2,\ 10^3,\ 3 \cdot 10^3,\ 10^4,\ 3 \cdot 10^4,\ 10^5 \quad cm^{-3}$

Hier ist die Referenzhöhe der Phase

$$z_{ref} = z_m - 20 = 55 \text{ km} \quad . \qquad (10.10)$$

Für die gleichen Parameter sind die Reflexionsfaktoren R_1 mit Hilfe unseres Schichtmodells manuell bestimmt worden. Tabb. 3 stellt als Beispiel zwei nach beiden Methoden berechnete Werte von R_1 für die Parameter

$z_m = 75$ km; $N_m = 1000\ cm^{-3}$

+) Die Abb. 6 bis 12 u. 16 bis 20 befinden sich am Ende des Berichtes und die beiden Frequenzen

$$\omega = 10^5 \text{ sec}^{-1} \text{ und } 3 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$$

gegenüber. Dieses Beispiel ist repräsentativ für die anderen Vergleichsrechnungen und zeigt, daß das Schichtmodell eine genügende Approximation Längstwellen gegenüber ist, vorausgesetzt, daß die in Abschnitt 7 geforderten Bedingungen erfüllt sind.

C	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0	N_m	ω
$\|R_d\|$	1,00	0,76	0,57	0,42	0,20	0,08	0,047		
$\|R_m\|$	1,00	0,76	0,59	0,40	0,19	0,07	0,03	10^3	10^5
$\emptyset_d$	0^0	-31^0	-62^0	-93^0	-152^0	-210^0	-260^0		
$\emptyset_m$	0^0	-30^0	-60^0	-95^0	-158^0	-219^0	-272^0		
$\|R_d\|$	1,00	0,55	0,27	0,12	0,013	0,001	0,000		
$\|R_m\|$	1,00	0,54	0,24	0,15	0,02	0,01	0,01	10^3	$3 \cdot 10^5$
$\emptyset_d$	0^0	-86^0	-180^0	-300^0	-565^0	-880^0	-1450^0		
$\emptyset_m$	0^0	-90^0	-184^0	-303^0	-570^0	-940^0	-1410^0		

Tab. 3

Vergleich von manueller (Index "m") und digitaler (Index "d") Rechnung für R_1. Die Phase $\emptyset$ ist auf eine Referenzhöhe von $z_{ref} = 55$ km bezogen.

Das abnorme Verhalten im Betrag des Reflexionsfaktors bei $N_m = 100$ und teilweise auch bei $N_m = 300$ für steilen Einfall ($C > 0,7$) ist die Folge der Modellwahl bei der Digitalrechnung. Wie schon erwähnt, war hier oberhalb von z_m eine homogene Ionosphäre mit den Parametern der Gl. (10.5) aufgesetzt worden. Für Werte von $N_m \geq 300$ ist die Schicht schon so dick, daß die Wellen nicht mehr bis zu diesem homogenen Gebiet vordringen können. Das wird durch die Abb. 9 verdeutlicht. Es ist hier mit Hilfe der Formel Gl. (4.14) das Verhältnis der elektrischen Feldstärken in der Höhe z zur Feldstärke in der Referenzhöhe von 55 km für die Parameter

$$N_m = 10^3 \ cm^{-3}$$
$$z_m = 75 \ km$$

und die Frequenzen

$$\omega = 0,5; \ 1; \ 2; \ 3 \cdot 10^5 \ sec^{-1}$$

eingezeichnet. Die linke Abbildung gilt für schrägen Einfall der Wellen (C = 0,1), die rechte Abbildung für senkrechten Einfall (C = 1).

Man erkennt, daß für die Frequenz $\omega = 10^5 \ sec^{-1}$ in der Höhe z_m nur noch 5% (für schrägen Einfall) bzw. 8% (für senkrechten Einfall) des Betrages der ursprünglichen Feldstärke vorhanden ist. Der überwiegende Teil ist reflektiert oder absorbiert worden. Tab. 3 zeigt, daß der absolute Fehler in $|R_1|$ kleiner als 0,04, der Fehler in $\emptyset$ im allgemeinen kleiner als 10% ist. Der Fehler in $\emptyset$ wird größer, wenn $|R|$ sehr klein ist, weil dann die graphische Methode zu ungenau wird.

Abb. 10 zeigt die (manuell berechneten) Reflexionsfaktoren für horizontale Polarisation R_4 nach Betrag und Phase für die Frequenz $\omega = 10^5 \ sec^{-1}$ und die Parameter

$$z_m = 75 \ km; \ N_m = 300, \ 1000, \ 3000 \quad cm^{-3}$$

sowie

$$z_m = 85 \ km; \ N_m = 300, \ 1000, \ 3000 \quad cm^{-3} \ .$$

In der Abb. 11 sind die Reflexionsfaktoren R_1 für die Parameter

$$z_m = 75 \ km$$
$$N_m = 1000 \ cm^{-3}$$

und die Frequenzen

$$\omega = 0,5 \cdot 10^5, \ 10^5, \ 2 \cdot 10^5, \ 3 \cdot 10^5 \quad sec^{-1}$$

gezeichnet.

Vergleicht man für schrägen Einfall (C < 0,4) und $z_m = 75$ km die berechneten und in den Abb. 6, 8 und 11 gezeichneten Beträge von R_1 mit den Fresnel'schen Reflexionsfaktoren $R_{1\infty}$ der unendlich ausgedehnten homogenen Ionosphäre mit scharfer unterer Begrenzung und dem Brechungsindex

$$\mu^2 = 1 - j\varkappa = 1 - \frac{j\sigma}{\omega_0 \varepsilon_0} \quad , \qquad (10.11)$$

so erhält man die in der Abb. 12 gezeichnete Frequenzabhängigkeit von $\varkappa$ für die Parameter

$$N_m = 300,\ 1000,\ 3000 \quad cm^{-3} \ .$$

Die Frequenzabhängigkeit der effektiven Leitfähigkeit σ ist in der gleichen Abb. 12 rechts eingetragen. σ zeigt ein ausgeprägtes frequenz- und schichtformabhängiges Maximum. Das Maximum ist von der Größenordnung

$$\sigma = 10^{-8}\ S\ cm^{-1} \quad . \qquad (10.12)$$

Während für Frequenzen $\omega \geqq 10^5\ sec^{-1}$ und $C < 0{,}4$ der Verlauf der $|R_1|$ mit dem Verlauf der entsprechenden $R_{1\infty}$ ausgezeichnet übereinstimmt, ist die für Frequenzen $\omega < 10^5\ sec^{-1}$ nur bis etwa $C = 0{,}2$ der Fall. Zwischen $0{,}2 < C < 0{,}6$ gibt es kein äquivalentes isotropes $R_{1\infty}$ für diese Frequenzen.

Für steilen Einfall ($C > 0{,}7$) und die Parameter

$$z_m = 75\ km$$
$$N_m = 1000\ cm^{-3}$$

ist $\varkappa$ bzw. σ auf die gleiche Weise bestimmt worden und ebenfalls in der Abb. 12 eingezeichnet. Wie man sieht, ist die effektive Leitfähigkeit der isotropen Ionosphäre bei steilem Einfall kleiner als bei schrägem Einfall und sehr stark frequenzabhängig. Mit kleiner werdender Frequenz nimmt der Einfluß der Schichtform auf den Betrag von R_1 ab.

Aus der Abb. 11 ist ersichtlich, daß für $C < 0{,}3$ und $C > 0{,}7$ annähernd

$$\emptyset \sim C \qquad (10.13)$$

ist. Aus Gl. (8.7) folgt daher, daß die scheinbare Höhe bei diesen Einfallswinkel konstant bleibt. In der Abb. 13 ist für

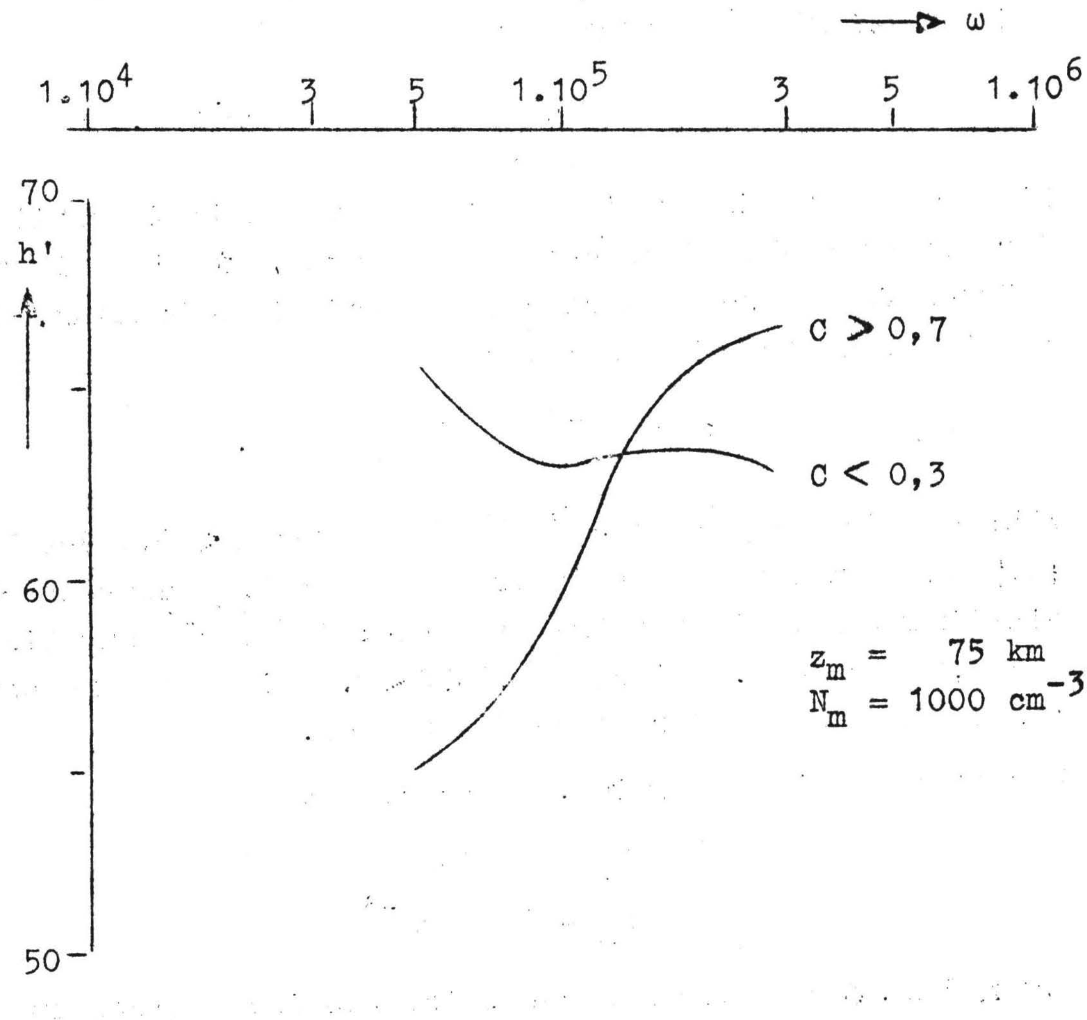


Abb.13: Scheinbare Reflexionshöhe h' einer isotropen inhomogenen Ionosphäre in Abhängigkeit von der Frequenz ω für steilen Einfall (C > 0,7) und flachen Einfall (C < 0,3)

die gleichen Parameter wie in der Abb. 11 die scheinbare Reflexionshöhe h' in Abhängigkeit von der Frequenz ω aus den berechneten Phasen der Abb. 11 bestimmt worden. Während sich die scheinbare Höhe bei schrägem Einfall nur wenig mit der Frequenz ändert, wächst sie bei steilem Einfall mit zunehmender Frequenz.

Wir wollen nun in unserem Ionosphärenmodell, das den Brechungsindex

$$\mu^2 = 1 - j \frac{\sigma(z)}{\omega \varepsilon_0} \qquad (10.14)$$

besitzt, die Fläche konstanter Leitfähigkeit

$$\sigma(z) \Big|_{z=z_a} = 10^5 \varepsilon_0 = 8{,}86 \quad 10^{-9} \text{ S cm}^{-1} \qquad (10.15)$$

oder

$$\frac{N_e(z)}{\nu(z)} = \frac{N_m}{\nu_m} e^{\frac{1}{2}\left(1+2\left(\frac{z_a-z_m}{H}\right) - e^{\frac{z_m-z_a}{H}}\right)} = 3{,}15 \cdot 10^{-5} \quad \text{cm}^{-3} \text{ sec}^{-1} \qquad (10.16)$$

verfolgen.

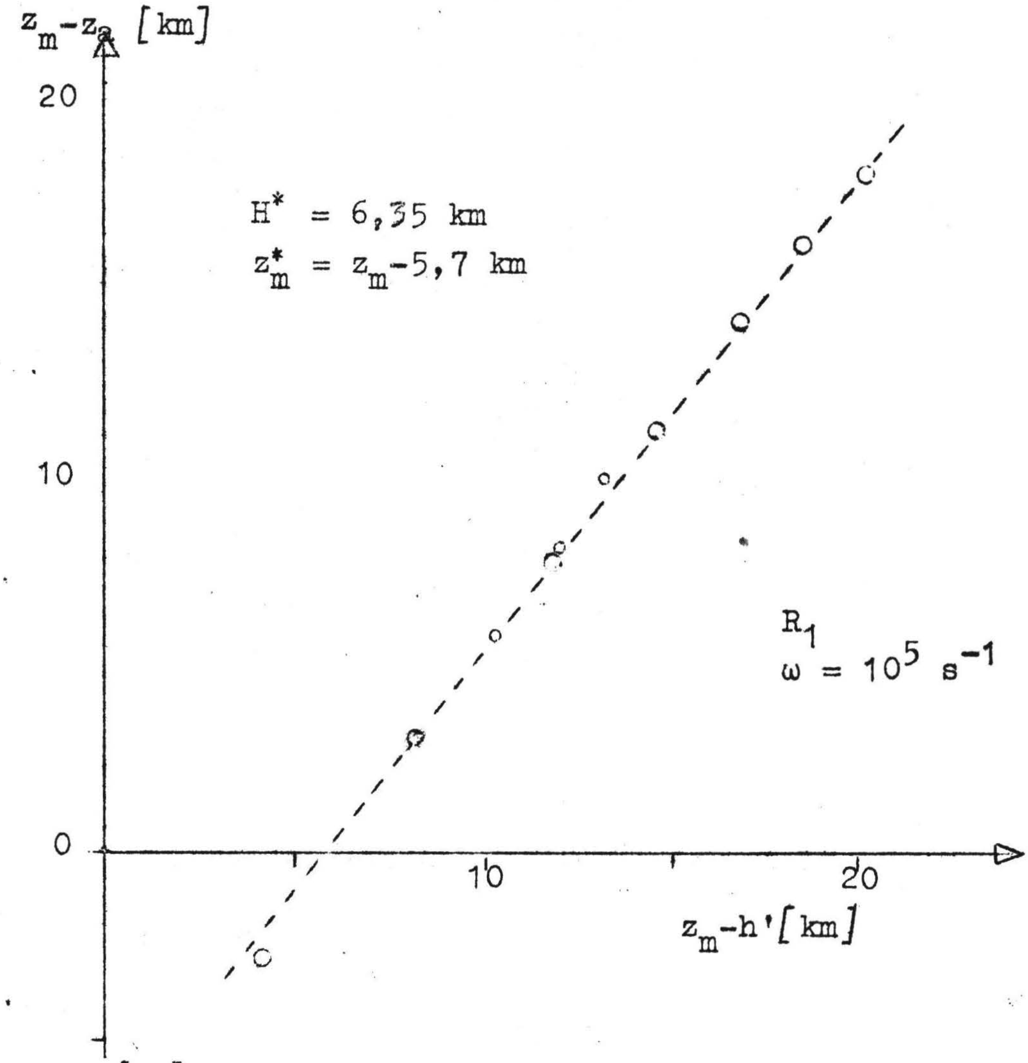
Vergleichen wir die auf diese Weise gewonnenen Werte von

$$z_m - z_a$$

mit den berechneten Werten

$$z_m - h' \quad ,$$

wie sie aus den Abb. 7 und 10 (für $C < 0{,}3$ und $\omega = 10^5$) und mittels der Gl. (8.7) folgen, so ergibt sich die Abb. 14. Die Kreise gehören zu den oberen Darstellungen der Abb. 7 und 10 (also zu den Parametern z_m = 75 km; $N_m = 10^2 \ldots 10^5$ cm^{-3} für R_1 bzw. z_m = 75 km; N_m = 300, 1000, 3000 cm^{-3} für R_4), die Punkte zu den unteren Darstellungen (also zu den Parametern N_m = 300 cm^{-3}; z_m = 80, 85, 90 km für R_1 bzw. z_m = 85 km; N_m = 300, 1000, 3000 cm^{-3} für R_4).



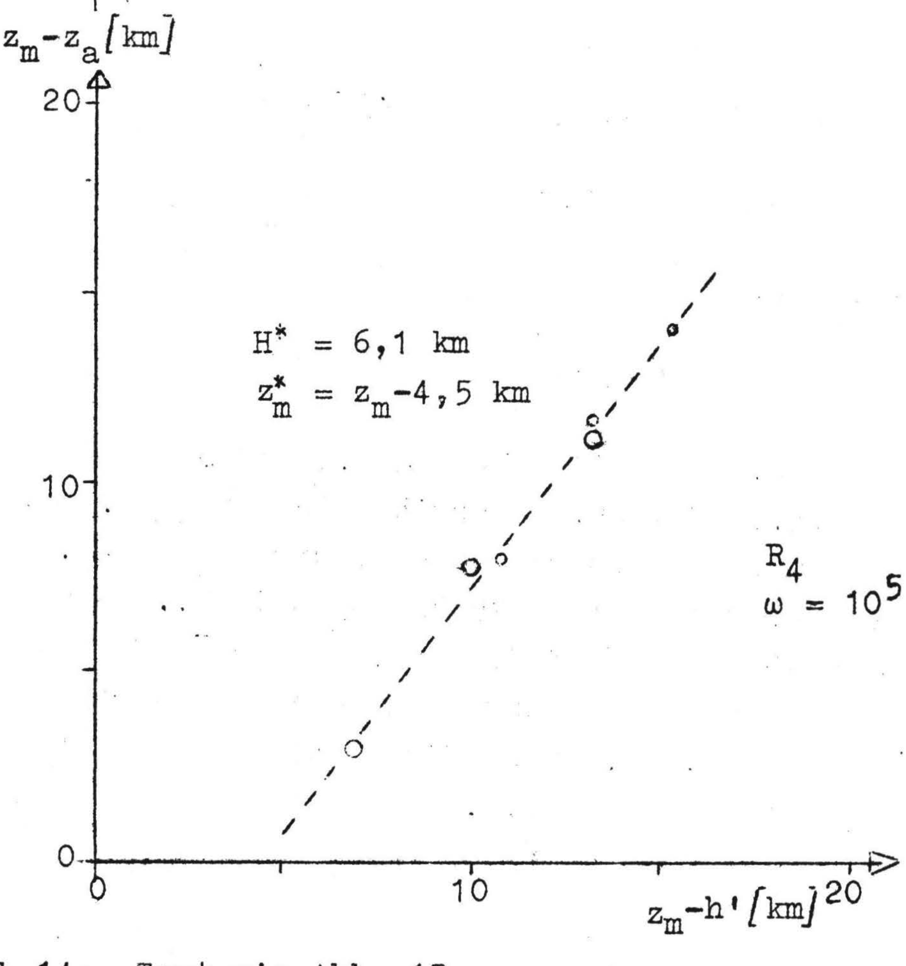


Abb. 14: Text wie Abb. 15

Sie liegen ziemlich gut auf einer Geraden, die als strichpunktierte Linien in die Abb. 14 eingezeichnet sind. Diese linearen Beziehungen können in der Form

$$\frac{z_m - z_a}{H} = \frac{z_m^* - h'}{H^*} \qquad (10.17)$$

mit

$$z_m^* = z_m - 5{,}7 \text{ km} \qquad \text{für } R_1$$

$$H^* = \frac{H}{1{,}26} = 6{,}35 \text{ km}$$

$$z_m^* = z_m - 4{,}5 \text{ km} \qquad \text{für } R_4$$

$$H^* = \frac{H}{1{,}31} = 6{,}1 \text{ km}$$

geschrieben werden. Die Abb. 15 ist auf die gleiche Weise für $\omega = 3 \cdot 10^5$ sec^{-1} aus der Abb. 8 gewonnen worden. Hier finden wir

$$z_m^* = z_m - 7{,}5 \text{ km}$$
$$H^* = \frac{H}{1{,}60} = 5{,}0 \text{ km} \quad . \qquad (10.18)$$

Gl. (10.17) besagt aber, daß die scheinbare Reflexionshöhe h' bei einer Chapman-Schicht mit dem Skalenwert H und der Maximalhöhe z_m sich so verhält, als sei sie der Führungspunkt an der Stelle

$$\sigma = 10^5 \, \varepsilon_0$$

einer transformierten Chapman-Schicht mit dem Skalenwert H* und der Maximalhöhe z_m^*.

Der Betrag des Reflexionsfaktors und die scheinbare Reflexionshöhe sind die beiden Größen, die aus Längstwellenregistrierungen gewonnen werden können. Gl. (10.17) liefert uns daher die Möglichkeit, aus den gewonnenen Werten der scheinbaren Höhe auf die Elektronendichte in der Höhe z_a zu schließen, sofern sich die Schicht ähnlich einer Chapman-Schicht verhält.

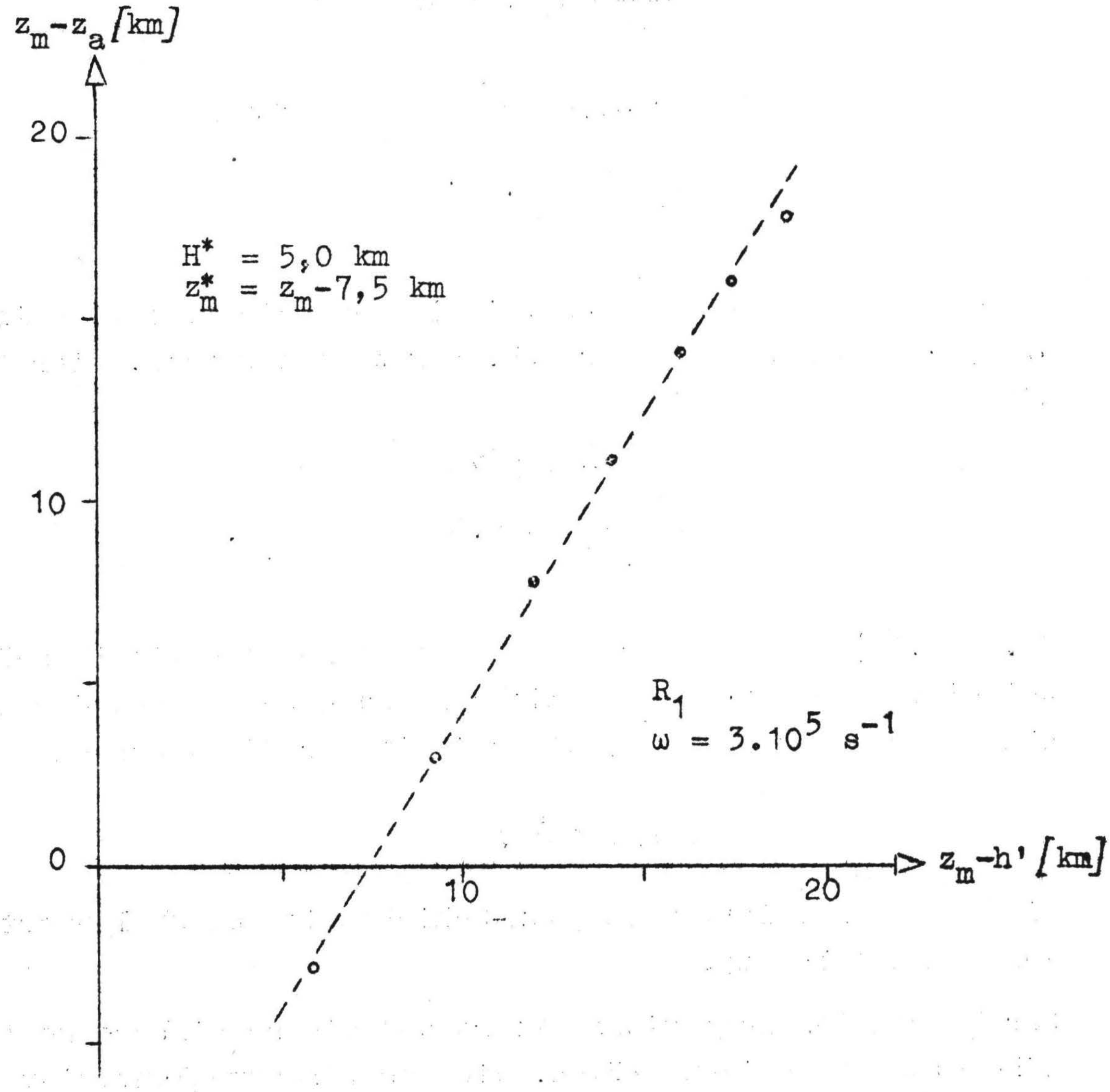


Abb.15: Beziehung zwischen scheinbarer Höhe h' und der Höhe z_a des Punktes $\frac{N_e}{\nu} = 3,15 \cdot 10^{-5}$ cm^{-3}sec einer isotropen Chapman-Schicht. Die gestrichelte Gerade ist von der Form

$$\frac{z_m - z_a}{H} = \frac{z_m^* - h'}{H^*} .$$

11. Reflexionsfaktoren von anisotropen inhomogenen Ionosphärenmodellen

Um den Einfluß des Erdmagnetfeldes auf die Reflexionseigenschaften der Ionosphäre zu untersuchen, wurden die Reflexionsfaktoren der Chapman-Schicht Gl. 10.2 für anisotrope Verhältnisse und für die Frequenz $\omega = 10^5 \text{ sec}^{-1}$ berechnet. Das Erdmagnetfeld wurde als vertikal (n=1) angenommen und mittlere geomagnetische Breiten ($\omega_H = 8 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$; $Y = 80$) vorausgesetzt. Als Stoßzahlprofil wurde diesmal das Nicolet'sche Profil (siehe Abb.4) benutzt, das oberhalb von 90 km Höhe stärker vom Exponentialprofil abweicht.

Die Abb. 16 und 17 zeigen berechnete Reflexionsfaktoren R_1 und R_4 für die Parameter

$$z_m = 75 \text{ km}; \quad N_m = 300,\ 1000,\ 3000 \quad \text{cm}^{-3}$$

und

$$z_m = 85 \text{ km}; \quad N_m = 300,\ 1000,\ 3000 \quad \text{cm}^{-3} .$$

Die Rechnung wurde mit Hilfe des Telefunken-Analogrechners durchgeführt. Dabei wurde der Ansatz Gl. (4.18) mit der Näherung Gl. (4.19) verwendet. Ein Vergleich mit den Abb. 6, 7 und 10 zeigt, daß in diesen Höhen das Erdmagnetfeld kaum einen Einfluß auf die Größen R_1 und R_4 hat.

Anders wird dies, wenn die Chapman-Schicht in noch größere Höhen verlegt wird. In den Abb. 18 und 19 sind für die Parameter

$$N_m = 1000 \text{ cm}^{-3} \quad ; \quad z_m = 95,\ 105 \text{ km}$$

die Reflexionsfaktoren R_1, R_2 und R_4 nach Betrag und Phase dargestellt, die manuell mit Hilfe der Gl. (5.18) berechnet worden sind. Zum Vergleich sind die entsprechenden Werte für

$$z_m = 75;\ 85 \text{ km}$$

hinzugefügt. Man erkennt deutlich eine wesentliche Änderung im Charakter der Reflexionsfaktoren R_1 und R_4 oberhalb von 90 km Höhe in Richtung zu einer idealen Reflexion hin.

Auch der Betrag von R_2 nimmt wesentlich zu. Bei steiler Einfall ist $|R_2|$ von der gleichen Größenordnung wie $|R_1|$ und $|R_4|$. Bei schrägem Einfall ist er wenigstens eine Größenordnung kleiner. Daher kommt es, daß ursprünglich linear polarisierte Wellen bei steilem Einfall in die Ionosphäre nach ihrer Reflexion als zirkular polarisierte Wellen erscheinen, bei schrägem Einfall aber nahezu linear polarisiert bleiben.

Das Anwachsen der Beträge von R_1 und R_4 mit zunehmender Höhe hat zur Folge, daß Atmospherics nachts eine wiederholte Reflexion an der Ionosphäre erleiden können, am Tage aber infolge der schlechteren Ausbreitungsbedingungen als deformierte Einzelimpulse erscheinen.

Die Phase (immer bezogen auf $z_{ref} = z_m - 20$ km) ändert sich mit wachsender Höhe oberhalb 90 km nur noch wenig, wie die Abb.19 zeigt. In der Abb. 20 sind endlich die Beträge der Feldstärke in der Höhe z in Bezug auf die Ausgangswerte (hier in Bezug auf die Werte in der Höhe

$$z_{ref} = z_m - 17{,}5 \text{ km} \quad)$$

für die ordentliche und außerordentliche Komponente und für senkrechten Einfall (C=0) gezeichnet. Sie sind aus der Gl.(4.29) berechnet worden. Man erkennt die mit wachsender Höhe stärker werdende Dämpfung der ordentlichen Komponente und die geringer werdende Dämpfung der außerordentlichen Komponente, so daß bei $z_m = 105$ km 50% des Betrages der außerordentlichen Komponente in die hohe Ionosphäre gelangen können.

Der erste Teil dieser Arbeit wurde im Herbst 1960 während meines Aufenthaltes in der Radio Group des Cavendish Laboratory, Universität Cambridge, angefertigt. Ich danke Herrn Dr.K.G.Budden für wertvolle Hinweise. Zu besonderem Dank bin ich Herrn Prof. Dr. F.W. Gundlach verpflichtet. Er ermöglichte mir ein Informations-Stipendium der OEEC-Länder für einen dreimonatigen Aufenthalt in England und schuf die Voraussetzungen zu dieser Arbeit.

12. Literatur

D. W. BARRON K. G. BUDDEN	1959	Proc. Roy. Soc. A 249 , 387
H.G. BOOKER	1936	Proc. Roy. Soc. A 155 , 235
K. G. BUDDEN	1955	Proc. Roy. Soc. A 227 , 516
K. G. BUDDEN	1961	"Radio Waves in the Ionosphere" Cambridge University Press, p.93
J. S. GREENHOW A.C.B. LOVELL	1960	in J.A. Ratcliffe (ed) "Physics of the Upper Atmosphere", Academie Press, p.528
M. NICOLET	1959	Phys. of Fluids 2, 95
M. NICOLET	1960	in .A. Ratcliffe(ed) "Physics of the Upper Atmosphere", Academic Press, p.55
H. POEVERLEIN	1958	Jour. Atm. Terr. Phys. 12, 126
J.A. RATCLIFFE K. WEEKES	1960	in J.A. Ratcliffe(ed), "Physics of the Upper Atmosphere", Academie Press, p.414
L.R.O. STOREY	1953	Phil.Trans. Roy. Soc. A 246, 113
J. TAUBENHEIM	1962	Jour.Atm.Terr.Phys. 24 (1962) 191
H. VOLLAND	1961	a)Jour. Res. NBS 65 D, 357
H. VOLLAND	1961	b)Vorträge und Berichte der Arbeitsgemeinschaft Ionosphärem, Kleinheubach

Das Manuskript dieser Arbeit wurde im Dezember 1961 abgeschlossen. Später erschienene Veröffentlichungen wurden daher nicht berücksichtigt.

13. Abbildungsunterschriften

Abb.4: Chapman-Profil der Elektronendichte N_e, Luftdichte ρ (Nicolet 1960), Stoßzahlprofil ν (Nicolet 1959) und exponentiell verlaufendes Stoßzahlprofil der tiefen Ionosphäre

Abb.6: Reflexionsfaktor R_1 (Betrag) der isotropen inhomogenen Ionosphäre ($\omega = 10^5\ s^{-1}$)

Abb.7: Reflexionsfaktor R_1 (Phase) der isotropen inhomogenen Ionosphäre ($\omega = 10^5\ s^{-1}$)

Abb.8: Reflexionsfaktor R_1 der isotropen inhomogenen Ionosphäre ($\omega = 3 \cdot 10^5\ s^{-1}$)

Abb.9: Verhältnis von Betrag der elektrischen Feldstärke in der Höhe z zum Betrag in der Höhe z_{ref} für vertikale Polarisation und steilen Einfall (C=1,0) bzw. flachen Einfall (C=0,1) für eine isotrope Chapman-Schicht

Abb.10: Reflexionsfaktor R_4 der isotropen inohomogenen Ionoshäre ($\omega = 10^5\ s^{-1}$)

Abb.11: Reflexionsfaktor R_1 der isotropen inhomogenen Ionoshäre ($\omega = 0{,}5 \cdot 10^5$ bis $3 \cdot 10^5\ s^{-1}$)

Abb.12: Die einer isotropen Chapman-Schicht äquivalente Leitfähigkeit σ (bzw. $\varkappa = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$) einer homogenen Ionosphäre mit scharfer unterer Begrenzung in Abhängigkeit von der Frequenz für schrägen Einfall ($C < 0{,}4$) und steilen Einfall ($C > 0{,}7$)

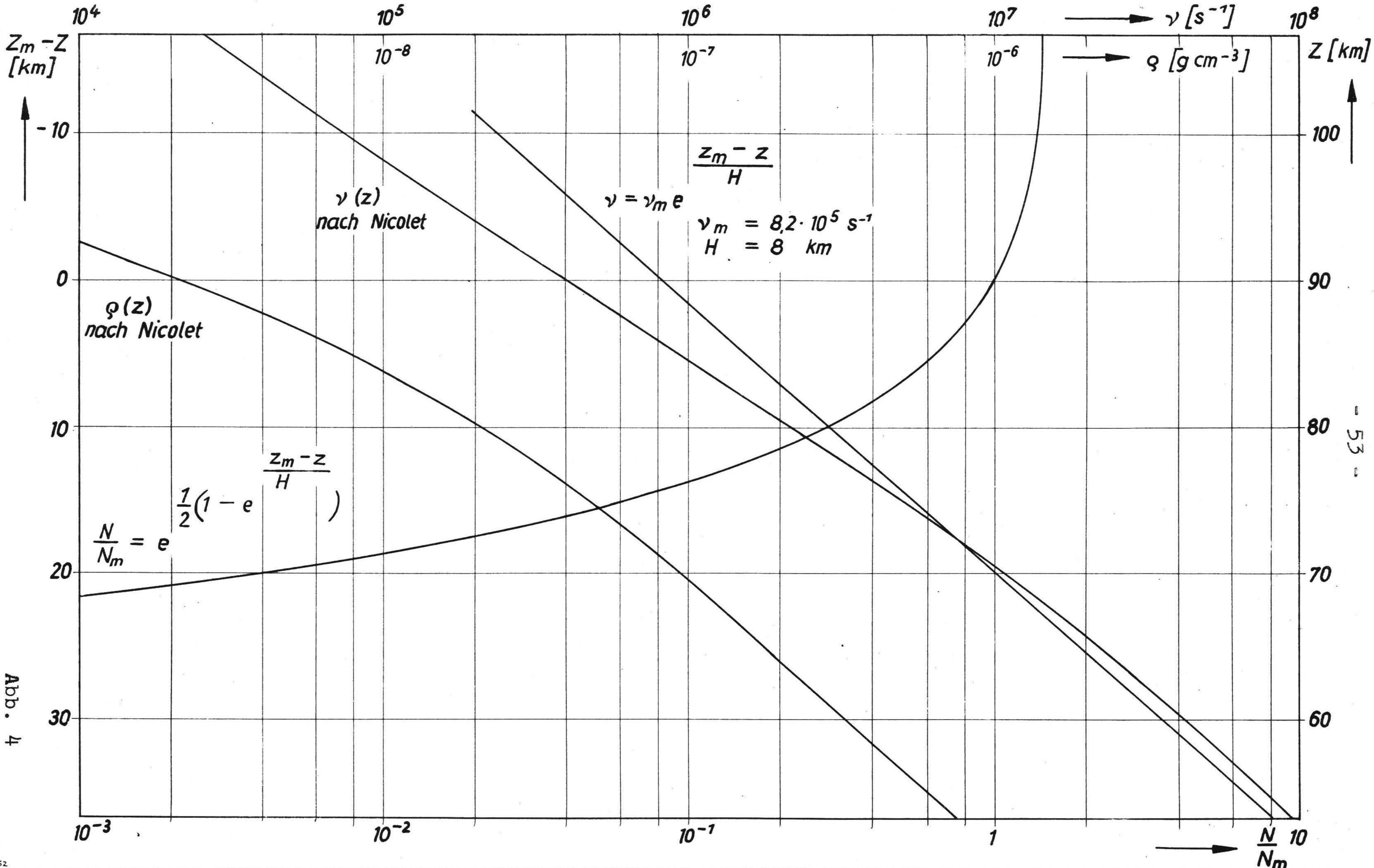
Abb.16: Reflexionsfaktor R_1 der anisotropen inhomogenen Ionosphäre ($\omega = 10^5\ s^{-1}$)

Abb.17: Reflexionsfaktor R_4 der anisotropen inhomogenen Ionosphäre ($\omega = 10^5\ s^{-1}$)

Abb.18: Reflexionsfaktoren (Betrag) der anisotropen inhomogenen Ionosphäre ($\omega = 10^5\ s^{-1}$)

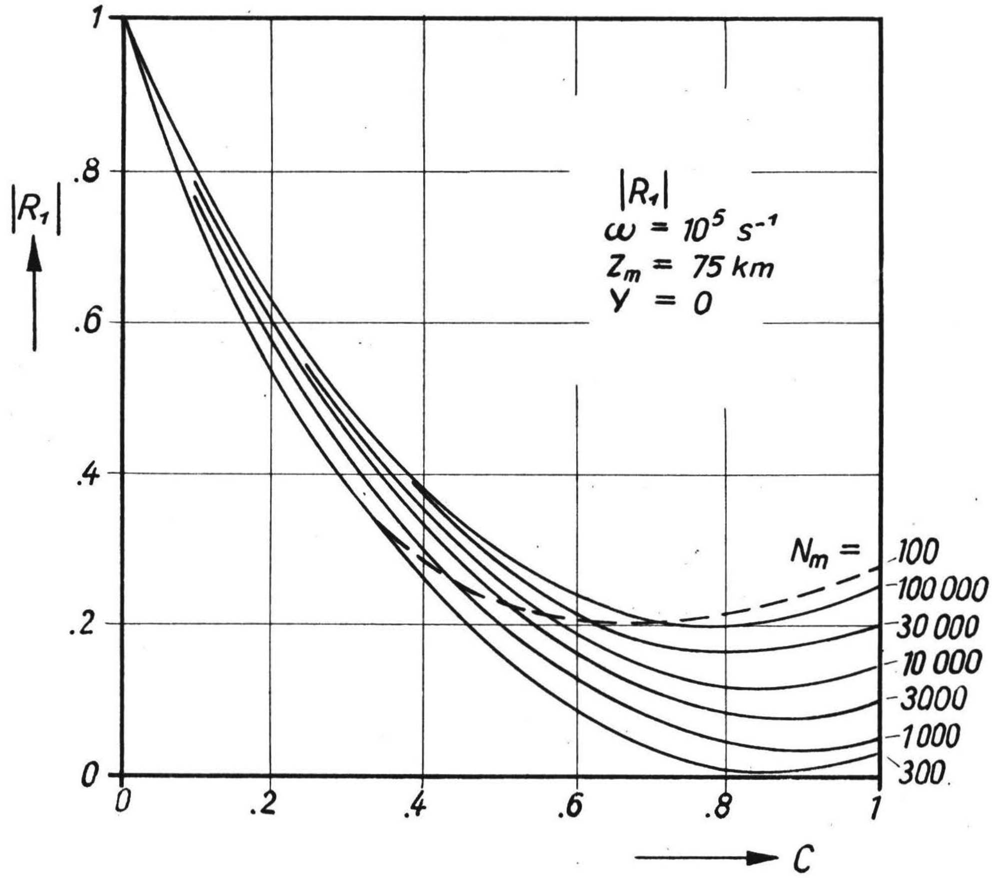
Abb.19: Reflexionsfaktoren (Phase) der anisotropen inhomogenen Ionosphäre ($\omega = 10^5\ s^{-1}$)

Abb.20: Verhältnis von Betrag der elektrischen Feldstärke in der Höhe z zum Betrag in der Höhe z_{ref} bei senkrechtem Einfall für ordentliche und außerordentliche Komponente in einer anisotropen Chapman-Schicht ($\omega = 10^5\ s^{-1}$)

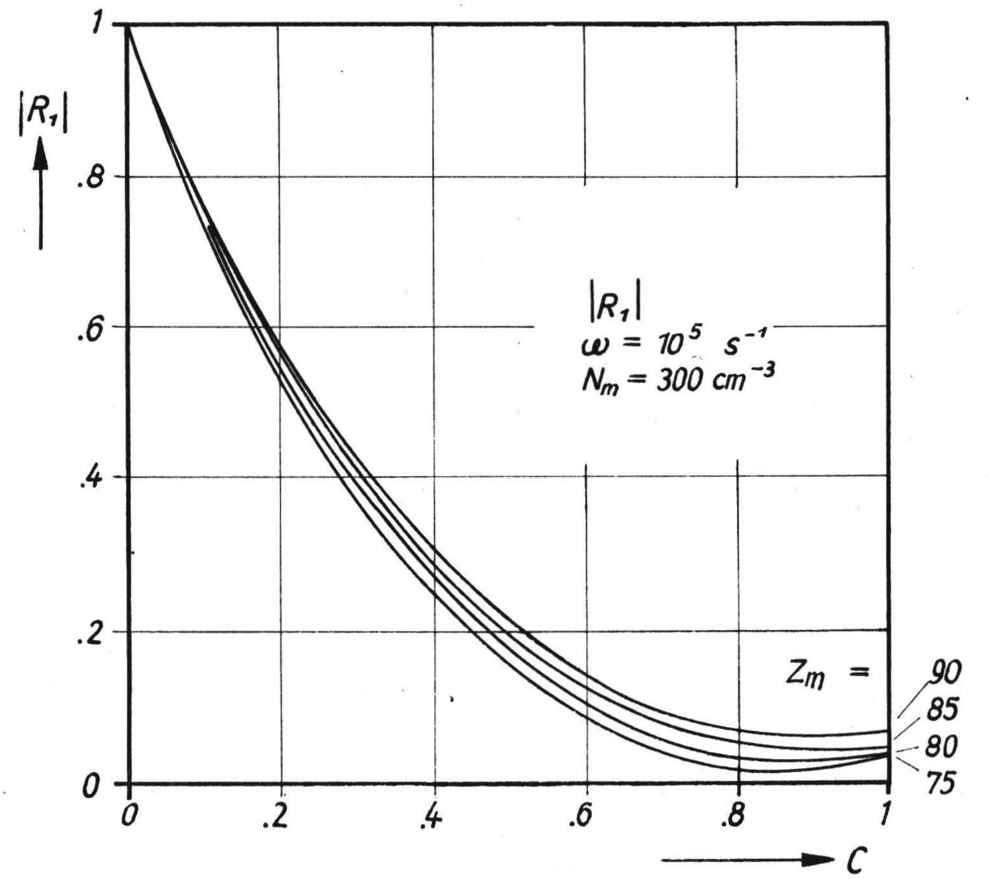


10^4 10^5 10^6 10^7 10^8 → $\nu\ [s^{-1}]$
10^{-8} 10^{-7} 10^{-6} → $\varrho\ [g\ cm^{-3}]$
$Z_m - Z$ [km]
Z [km]
-10
0
10
20
30
100
90
80
70
60
$\nu = \nu_m\, e^{\frac{z_m - z}{H}}$
$\nu_m = 8{,}2 \cdot 10^5\ s^{-1}$
$H = 8$ km
$\nu(z)$ nach Nicolet
$\varrho(z)$ nach Nicolet
$\frac{N}{N_m} = e^{\frac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{z_m - z}{H}}\right)}$
10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 1 10
→ $\frac{N}{N_m}$

Abb. 4



1
.8
.6
.4
.2
0
$|R_1|$
$|R_1|$
$\omega = 10^5\ s^{-1}$
$Z_m = 75\ km$
$Y = 0$
$N_m =$
100
100 000
30 000
10 000
3000
1000
300
0
.2
.4
.6
.8
1
C



1
.8
.6
.4
.2
0
$|R_1|$
$|R_1|$
$\omega = 10^5\ s^{-1}$
$N_m = 300\ cm^{-3}$
$Z_m =$
90
85
80
75
0
.2
.4
.6
.8
1
C

Abb. 6

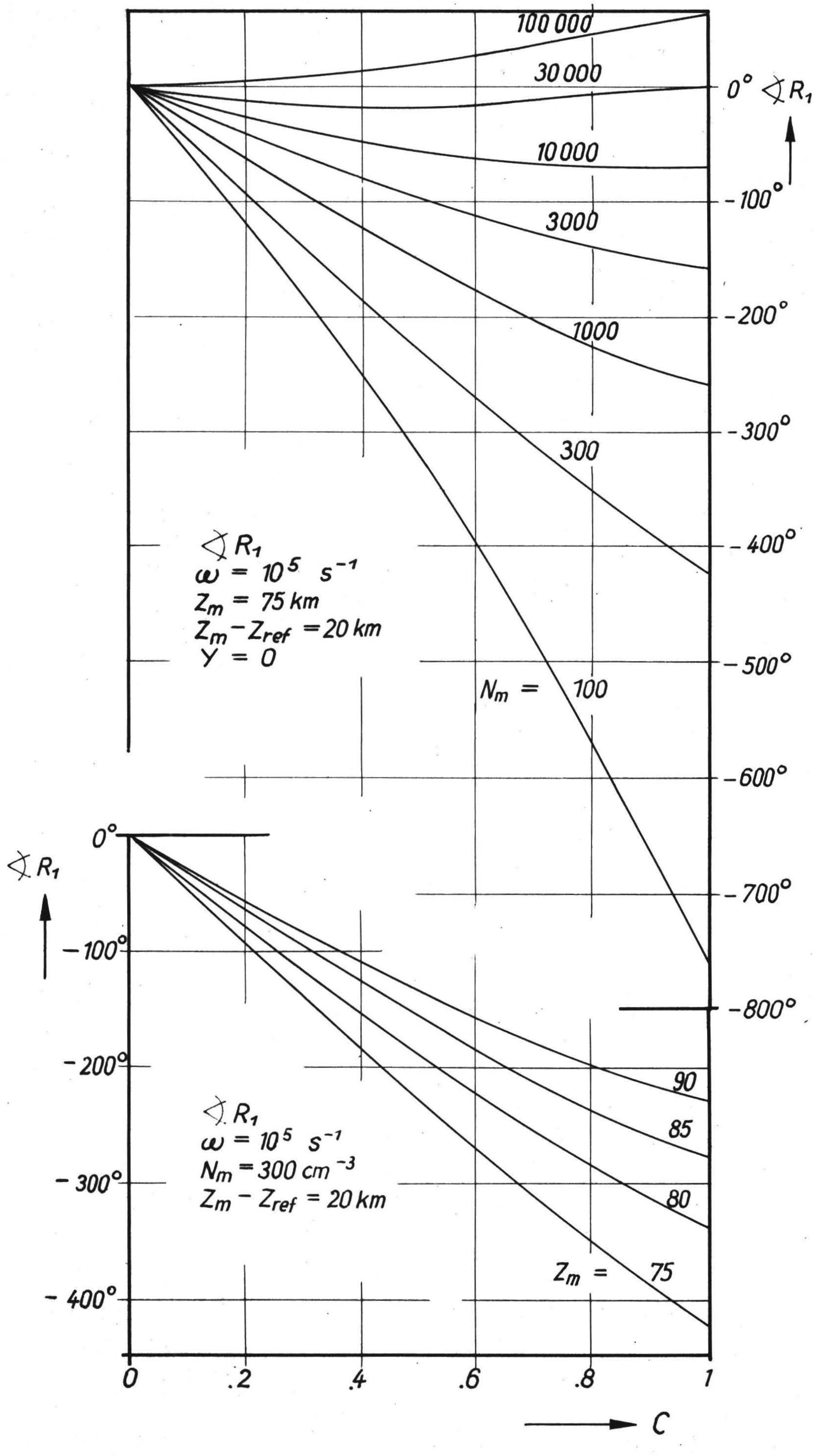
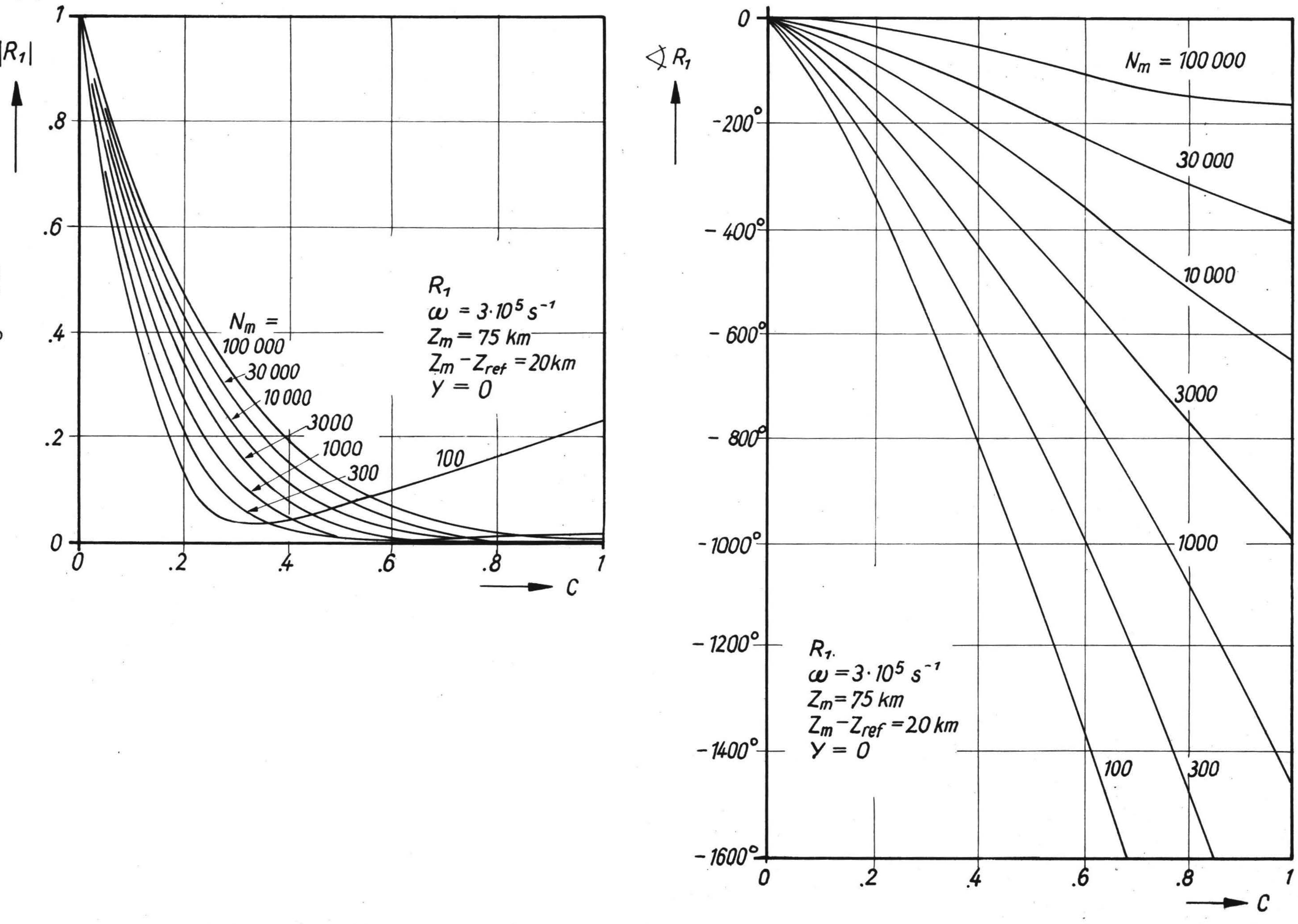
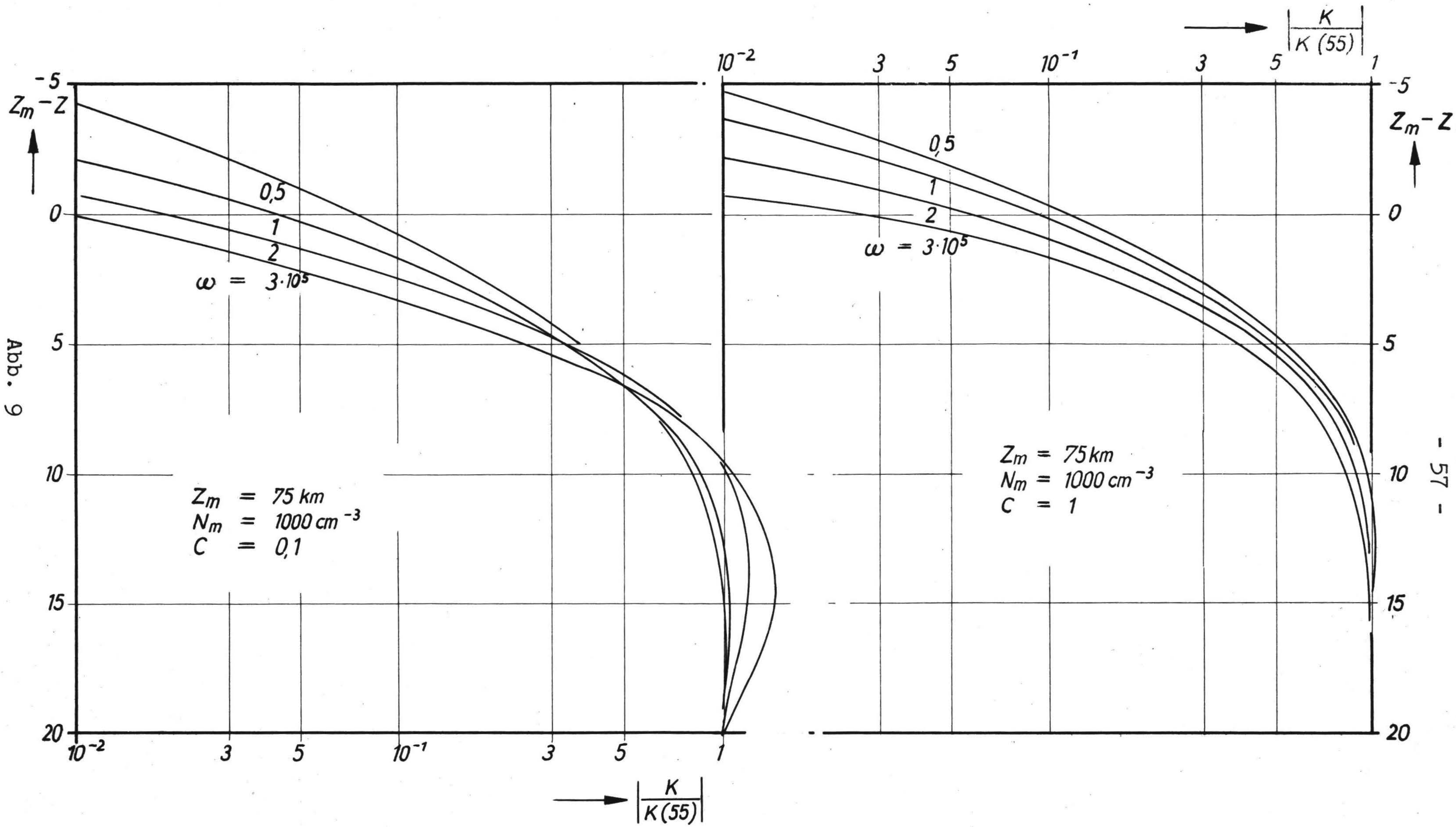

100 000
30 000
10 000
3000
1000
300
N_m = 100
0° ∢ R_1
- 100°
- 200°
- 300°
- 400°
- 500°
- 600°
- 700°
- 800°
∢ R_1
$\omega = 10^5\ s^{-1}$
Z_m = 75 km
$Z_m - Z_{ref}$ = 20 km
Y = 0
0°
∢ R_1
- 100°
- 200°
- 300°
- 400°
90
85
80
Z_m = 75
∢ R_1
$\omega = 10^5\ s^{-1}$
$N_m = 300\ cm^{-3}$
$Z_m - Z_{ref}$ = 20 km
0
.2
.4
.6
.8
1
C

Abb. 7

Abb. 8



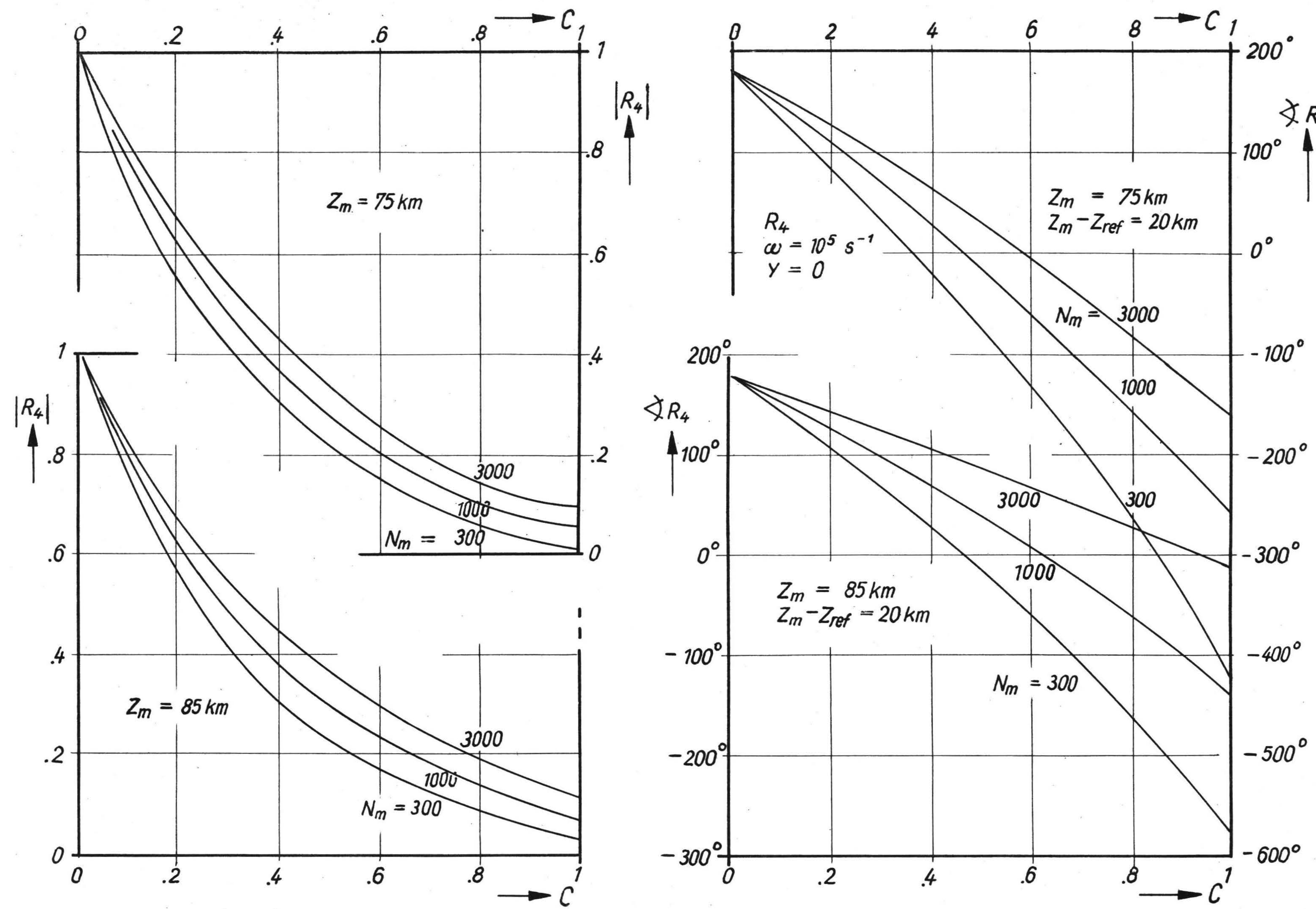
$|R_1|$
$N_m =$
100 000
30 000
10 000
3000
1000
300
100
R_1
$\omega = 3 \cdot 10^5\ s^{-1}$
$Z_m = 75\ km$
$Z_m - Z_{ref} = 20 km$
$Y = 0$
C
$\sphericalangle R_1$
$N_m = 100\,000$
30 000
10 000
3000
1000
100
300
R_1
$\omega = 3 \cdot 10^5\ s^{-1}$
$Z_m = 75\ km$
$Z_m - Z_{ref} = 20\ km$
$Y = 0$
C

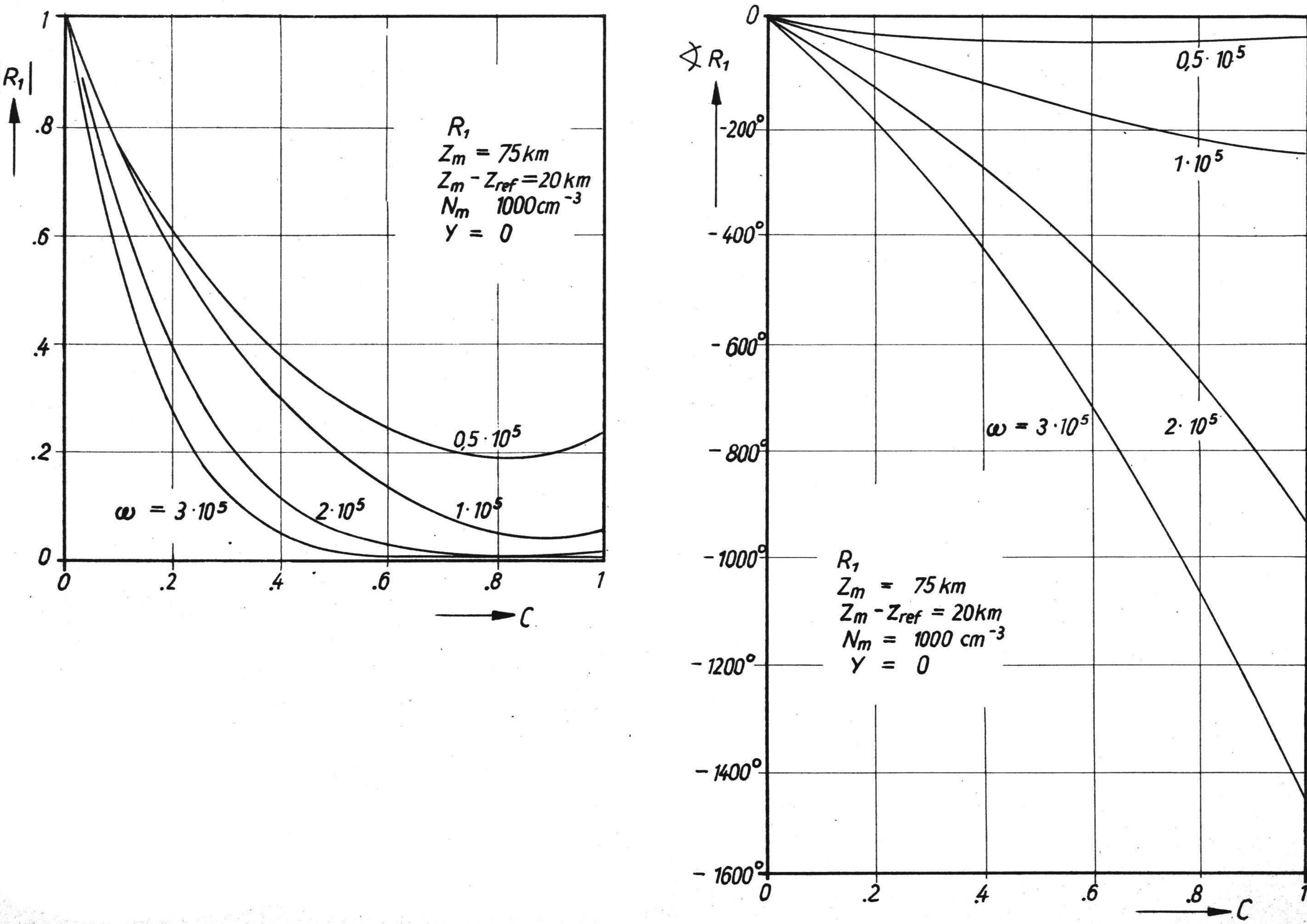


$Z_m - Z$
$\left|\frac{K}{K(55)}\right|$
0,5
1
2
$\omega = 3 \cdot 10^5$
$Z_m = 75$ km
$N_m = 1000$ cm^{-3}
$C = 0{,}1$
$Z_m = 75$ km
$N_m = 1000$ cm^{-3}
$C = 1$
10^{-2} 3 5 10^{-1} 3 5 1
-5 0 5 10 15 20

Abb. 9

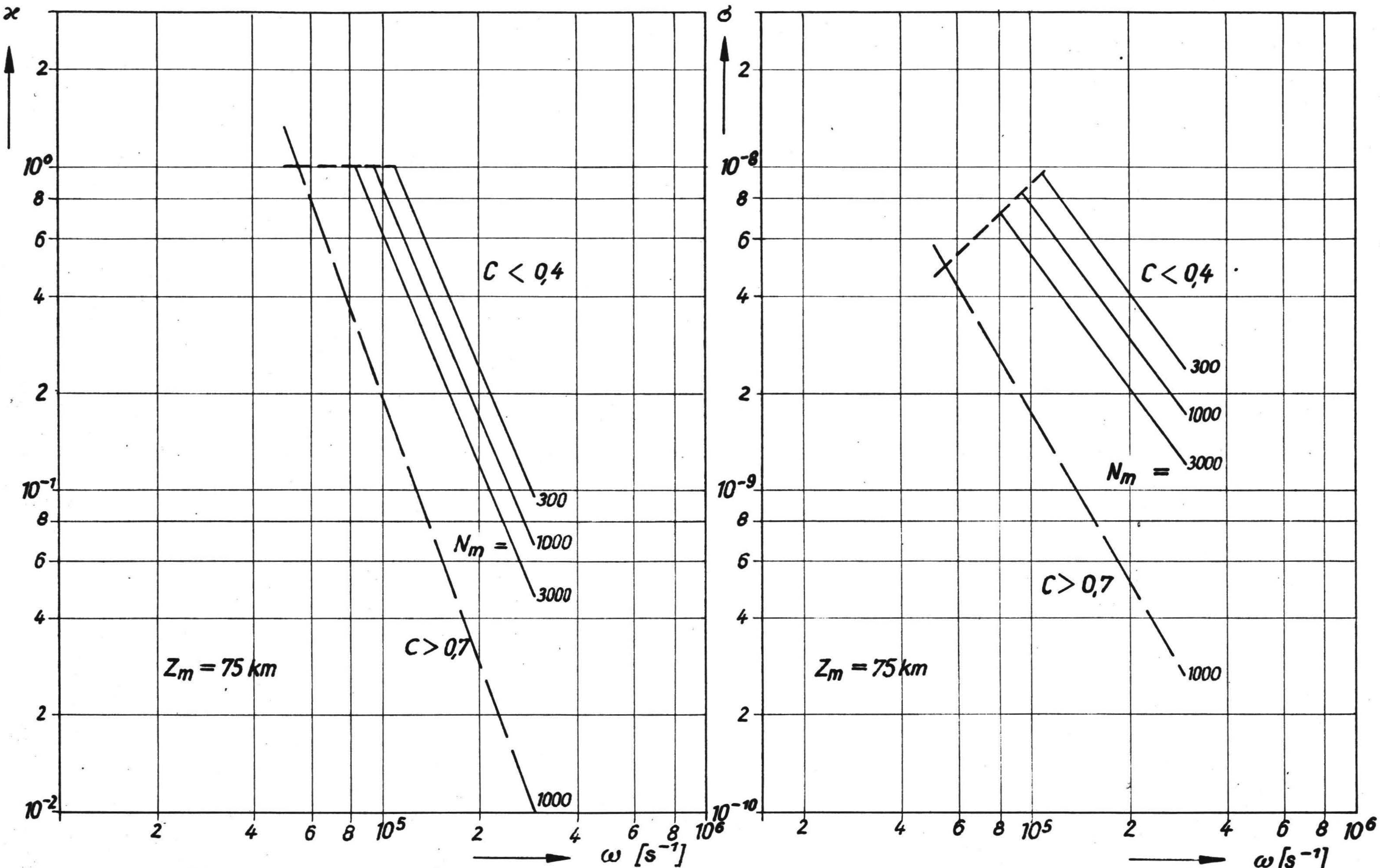
Abb. 10


C
|R4|
Zm = 75 km
3000
1000
Nm = 300
Zm = 85 km
R4
ω = 10^5 s^-1
Y = 0
Zm = 75 km
Zm − Zref = 20 km
Nm = 3000
Zm = 85 km
Zm − Zref = 20 km
Nm = 300



|R1|
R1
Zm = 75 km
Zm - Zref = 20 km
Nm 1000 cm-3
Y = 0
0,5 · 10^5
1 · 10^5
2 · 10^5
ω = 3 · 10^5
C
∢ R1
0
-200°
-400°
-600°
-800°
-1000°
-1200°
-1400°
-1600°
0,5 · 10^5
1 · 10^5
2 · 10^5
ω = 3 · 10^5
R1
Zm = 75 km
Zm - Zref = 20km
Nm = 1000 cm-3
Y = 0
0
.2
.4
.6
.8
1
C

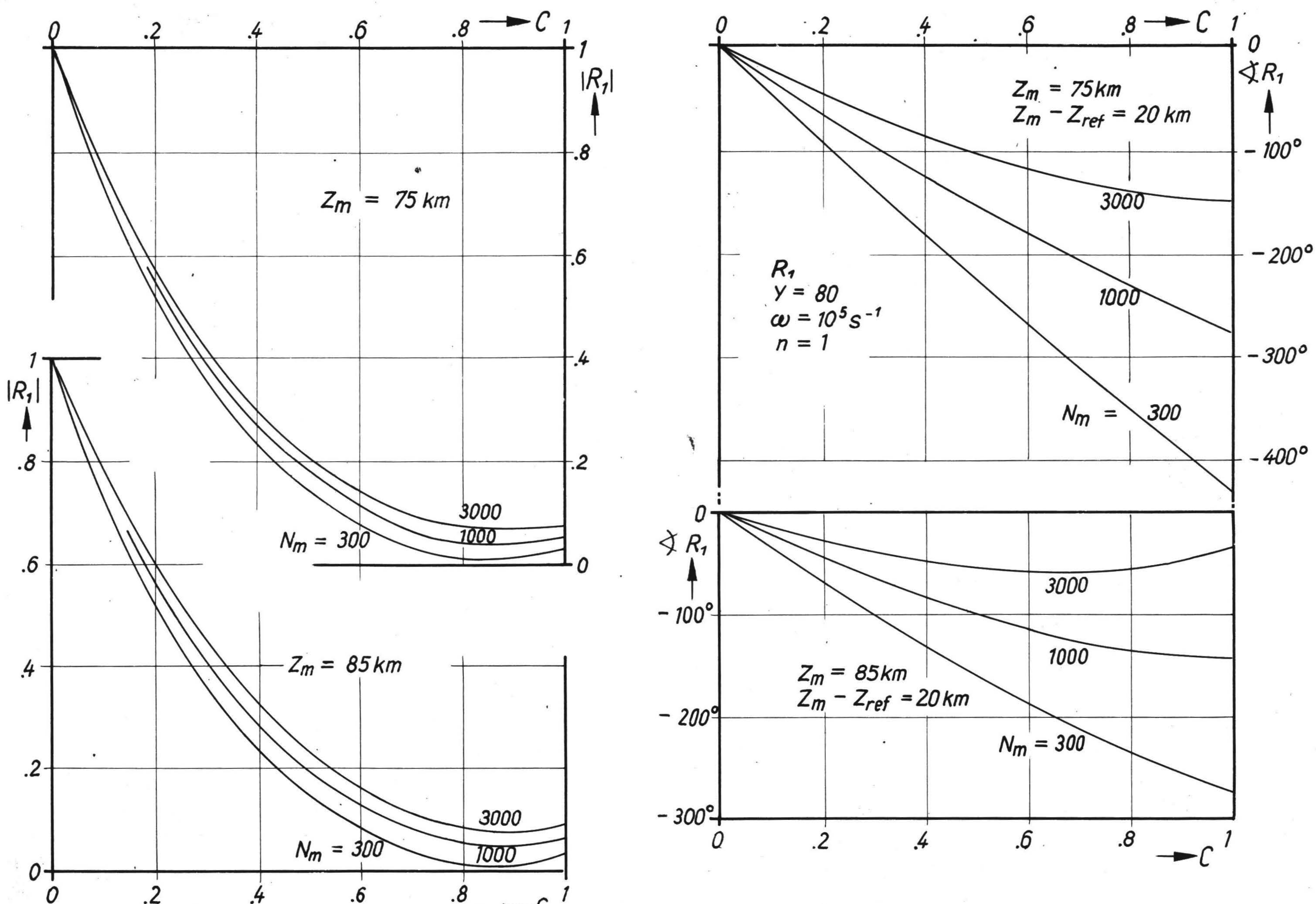
Abb. 11



ϰ
10⁰
10⁻¹
10⁻²
C < 0,4
C > 0,7
N_m =
300
1000
3000
1000
Z_m = 75 km
ω [s⁻¹]
σ
10⁻⁸
10⁻⁹
10⁻¹⁰
C < 0,4
C > 0,7
N_m =
300
1000
3000
1000
Z_m = 75 km
ω [s⁻¹]

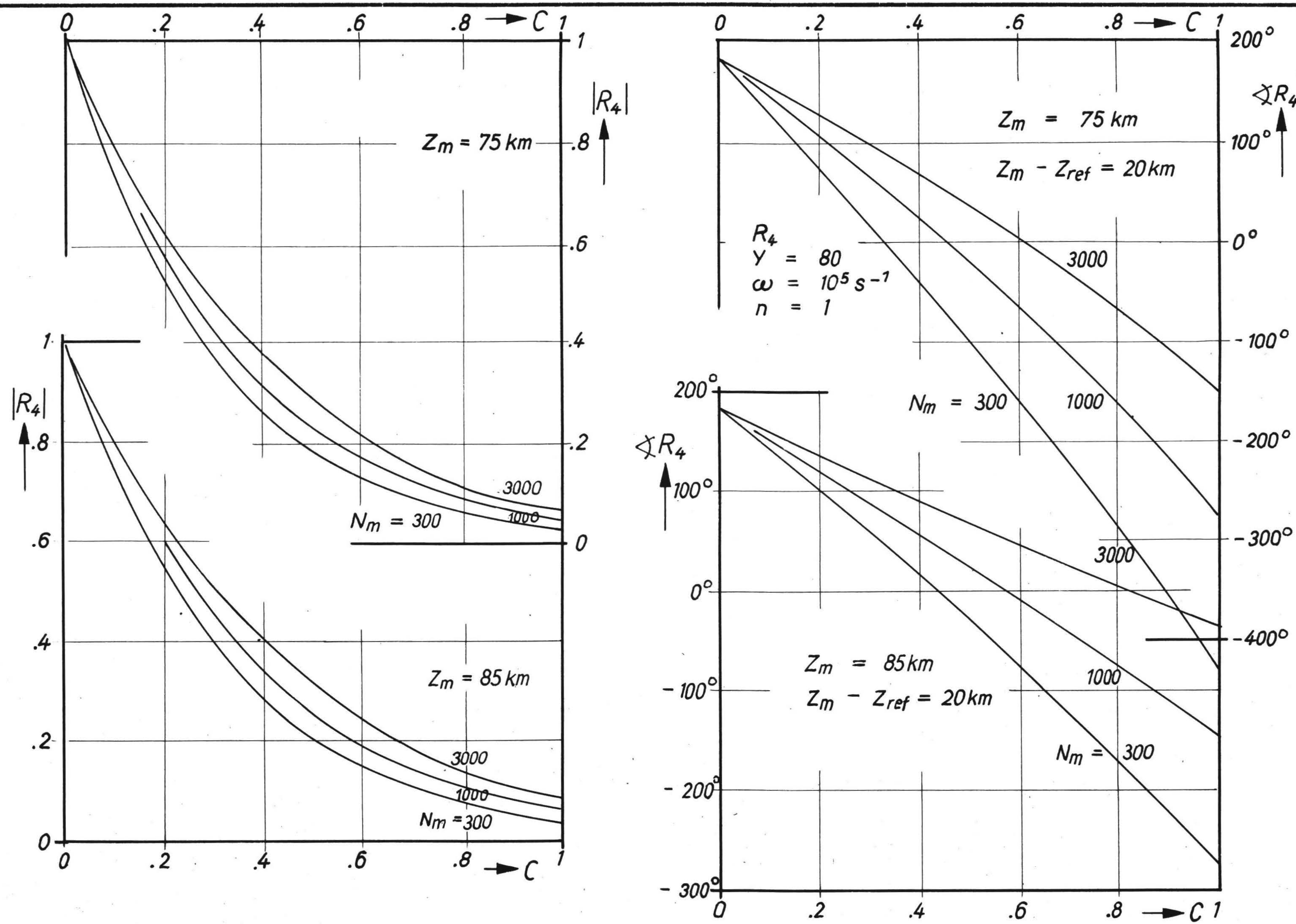
Abb. 12

Abb. 16



C
|R1|
Zm = 75 km
3000
1000
Nm = 300
Zm = 85 km
Zm = 75 km
Zm − Zref = 20 km
R1
γ = 80
ω = 10^5 s^-1
n = 1
Nm = 300
Zm = 85 km
Zm − Zref = 20 km
∢ R1
−100°
−200°
−300°
−400°

Abb. 17



|R4|
Zm = 75 km
Nm = 300
1000
3000
Zm = 85 km
Nm = 300
1000
3000
C
∢R4
Zm = 75 km
Zm - Zref = 20 km
R4
Y = 80
ω = 10^5 s^-1
n = 1
Nm = 300
1000
3000
Zm = 85 km
Zm - Zref = 20 km
Nm = 300
1000
3000

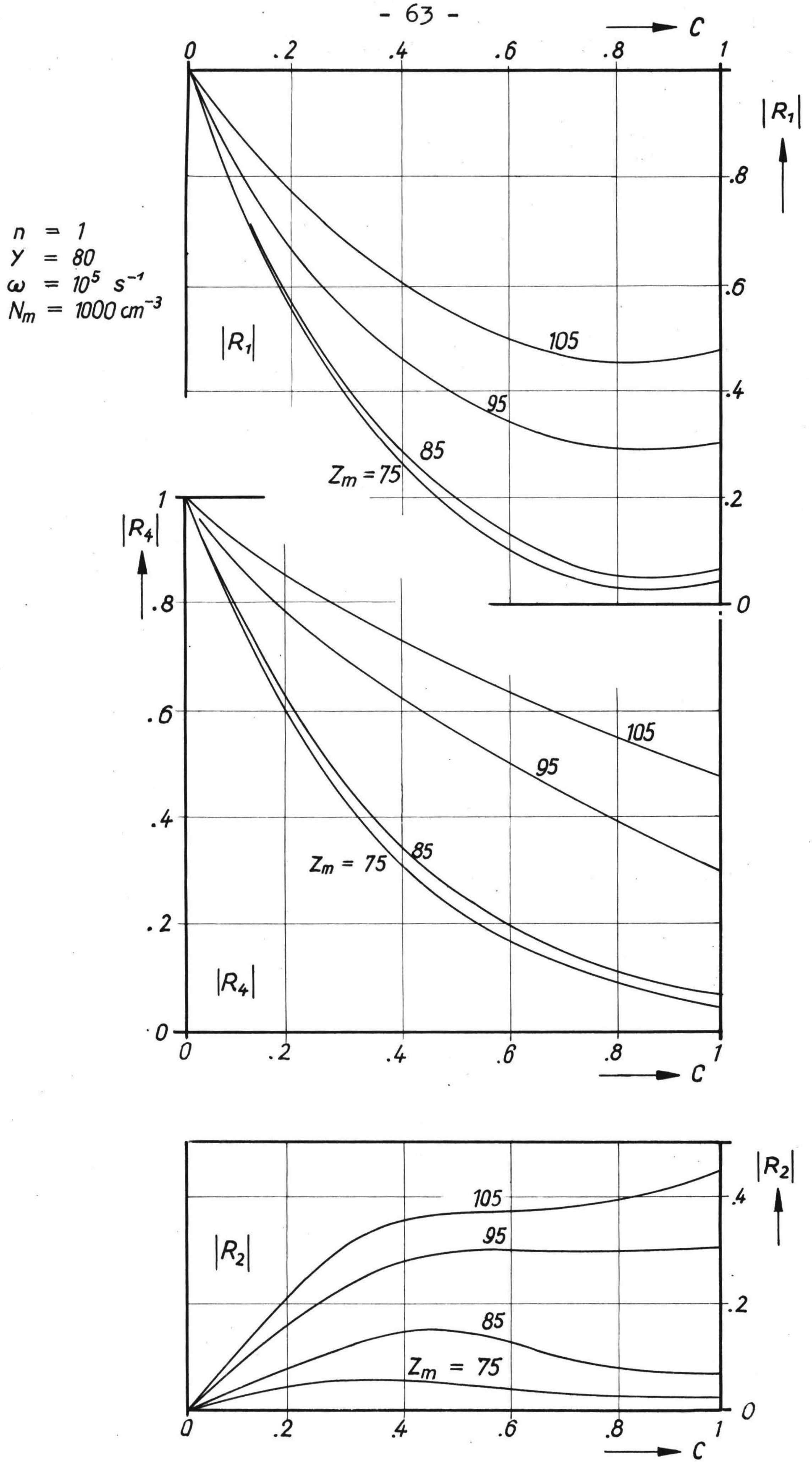


Abb. 18

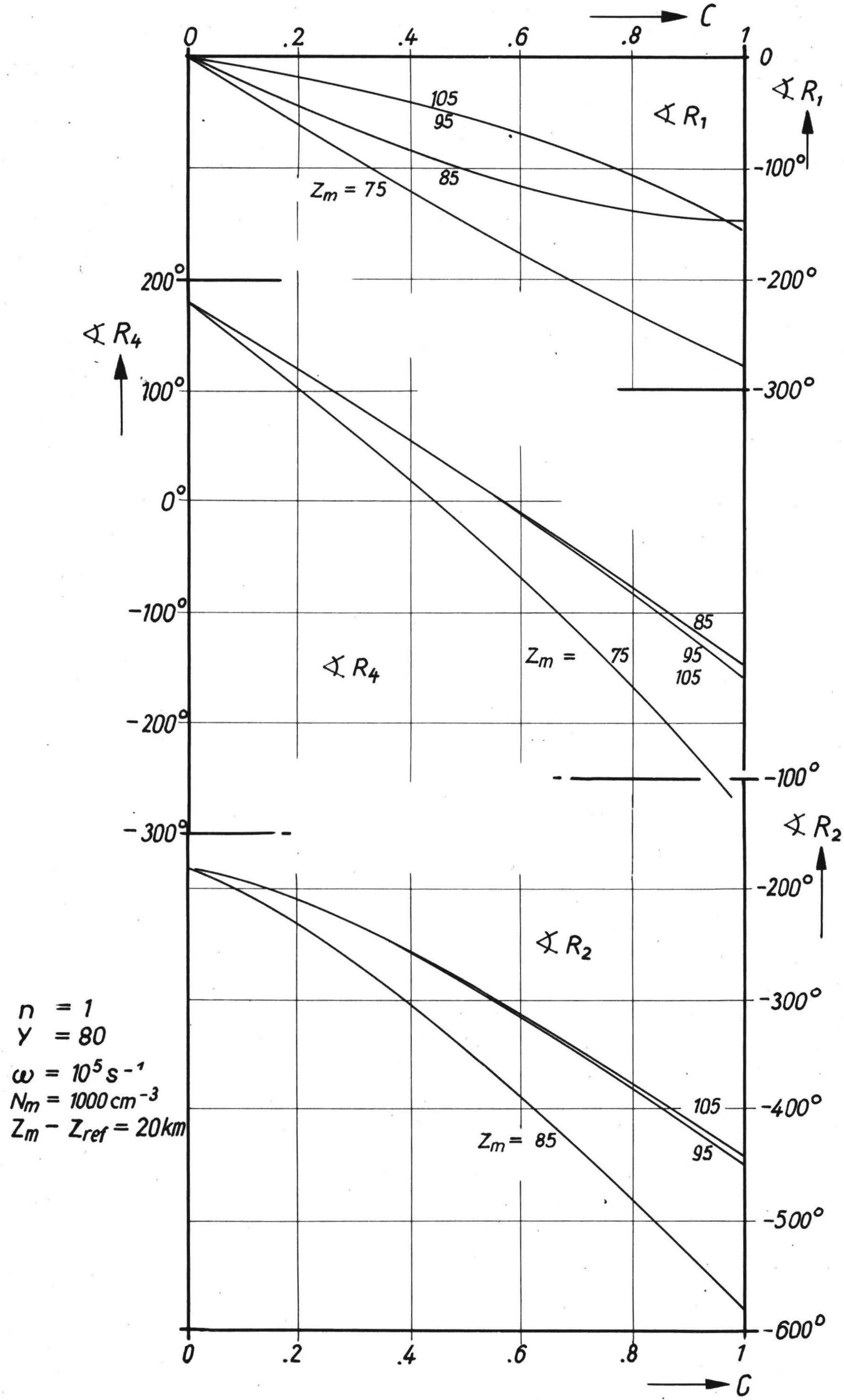
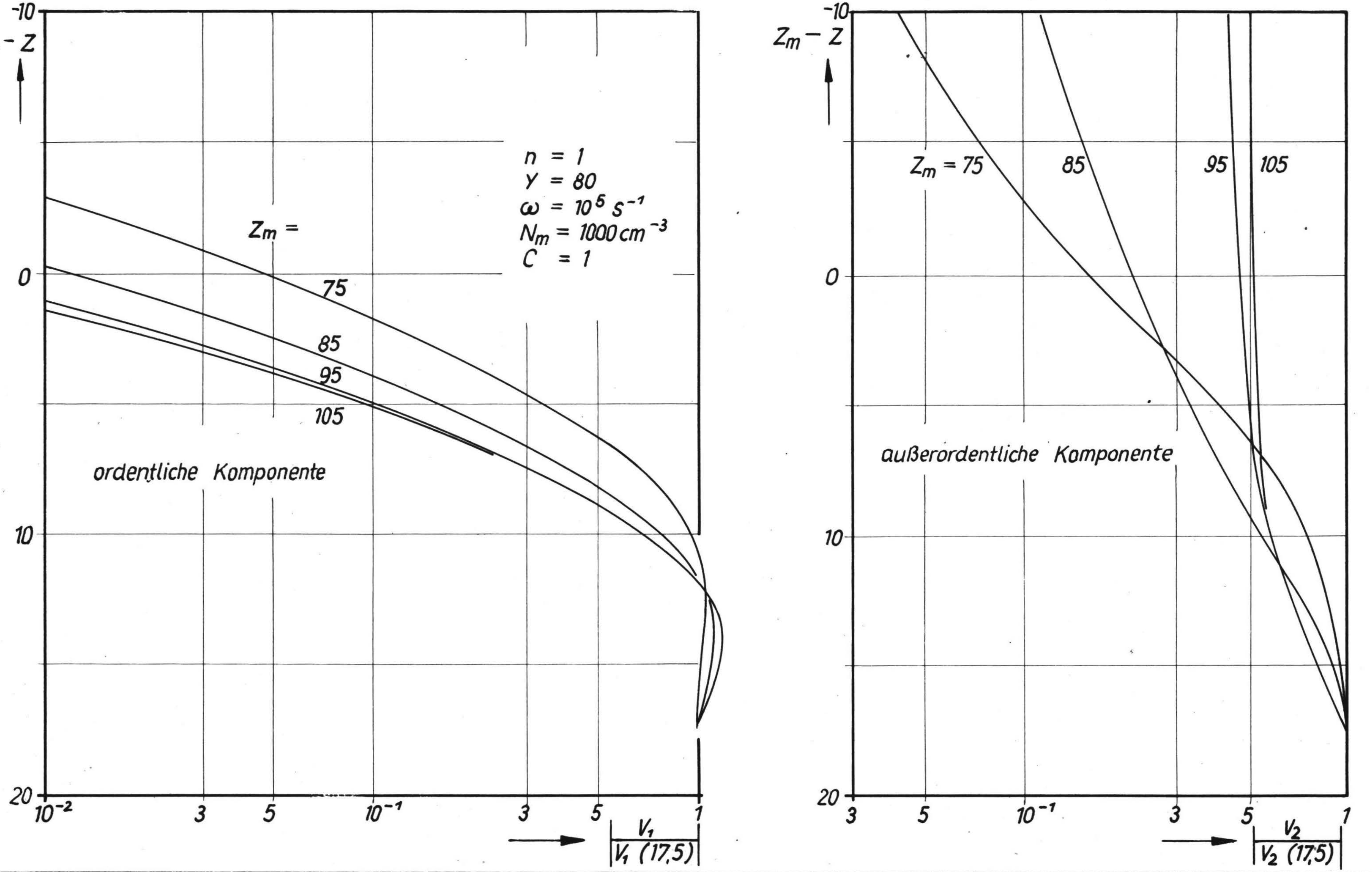

C
0
.2
.4
.6
.8
1
∢ R₁
105
95
85
Z_m = 75
0
-100°
-200°
-300°
200°
100°
0°
-100°
-200°
-300°
∢ R₄
85
Z_m = 75
95
105
-100°
∢ R₂
-200°
-300°
-400°
-500°
-600°
105
Z_m = 85
95
n = 1
Y = 80
$\omega = 10^5 s^{-1}$
$N_m = 1000 cm^{-3}$
$Z_m - Z_{ref} = 20 km$

Abb. 19

Abb. 20



$Z_m - Z$
$n = 1$
$Y = 80$
$\omega = 10^5\ s^{-1}$
$N_m = 1000\ cm^{-3}$
$C = 1$
$Z_m =$
75
85
95
105
ordentliche Komponente
$\frac{V_1}{V_1\ (17{,}5)}$
$Z_m = 75$
85
95
105
außerordentliche Komponente
$\frac{V_2}{V_2\ (17{,}5)}$